MATEMATIKA 11

I dalis



LEIDĖJŲ ŽODIS

Mieli vienuoliktokai,
šis vadovėlis skirtas pasirinkusiems išplėstinį matematikos kursą. Vadovėlio pirmą dalį sudaro 1 ir 2 skyriai bei dalis 3 skyriaus, antrą — 3 skyriaus tęsinys ir 4 bei 5 skyriai. Pirmuosiuose keturiuose skyriuose dėstoma nauja medžiaga, o penktame skyriuje „Plokštumos geometrija“ daugiausia kartojami žinomi planimetrijos kurso dalykai. Kiekvienas skyrius sudarytas iš skyrelių, kuriuose dėstoma teorija, pateikiami išspręsti pavyzdžiai ir duodamos užduotys, kurias turėtumėte atlikti savarankiškai. Beveik kiekvieno skyrelio pabaigoje yra pratimų ir uždavinių, susijusių su prieš tai nagrinėta teorine medžiaga. Spręsdami uždavinius geriau įsiminsite teoriją, giliau suvoksite dalyką. Kaip paprastai, sunkesniųjų uždavinių numeriai nuspalvinti. Kiekvieno skyriaus pabaigoje yra kartojimo uždavinių. Spręsdami šiuos uždavinius prisiminsite skyriaus medžiagą. Tarp jų rasite ir geometrijos uždavinių, kuriuos spręsti mokėtės pagrindinėje mokykloje. Geometriją geriausia po truputį kartoti per visus mokslo metus, o ne tik artėjant egzaminui. Kartojimo uždavinių skyrelyje su atskiru pavadinimu „Įvairūs uždaviniai“ pateikta uždavinių, kurie nėra tiesiogiai susiję su išnagrinėtu skyriumi. Šiame skirsnyje rasite ir lengvesnių, ir sunkesnių uždavinių. Kai kurių uždavinių sprendimo būdai nėra aptarti teorijoje, taigi juos sprendžiant gali tekti kai ką sugalvoti patiems, galbūt patarimo paklausti mokytojo. Kam uždavinių pasirodys per mažai, galės pasinaudoti atskira knygele išleistu uždavinynu.
Šį vadovėlį kūrė ne vien autorių kolektyvas, bet ir leidyklos specialistai, konsultantai, eksperimentuojantys mokytojai. Nuoširdžiai dėkojame visiems, prisidėjusiems rengiant vadovėlį.
Prašome savo pastabas, pageidavimus ir pasiūlymus siųsti adresu:
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2021 Vilnius.

Vadovėlį rengė autorių kolektyvas:

***Kornelija Intienė*, *Antanas Skūpas*, *Vilius Stakėnas*, *Eugenijus Stankus*, *Vladas Vitkus*.**

Su eksperimentiniu vadovėliu dirbo mokytojai: *R. Biekšienė*, *V. Bartkuvienė*, *K. Intienė*, *M. Jakutienė*, *V. Jankevičienė*, *R. Jonaitienė*, *O. Juodienė*, *A. Karmanova*, *S. Kavaliūnienė*, *R. Klasauskienė*, *I. Knyzelienė*, *R. Kučiauskienė*, *A. Kukučionienė*, *R. Kuliešienė*, *D. Matienė*, *G. Mikalauskienė*, *L. Papuškienė*, *P. Puzinaitė*, *V. Sičiūnienė*, *S. Staknienė*, *V. Stoškuvienė*, *D. Šileikienė*, *A. Šverienė*, *A. Ūsienė*, *V. Viniautienė*, *R. Želvienė*, *R. Žeimienė*.

MATEMATIKA 11

I DALIS

TEV

VILNIUS 2004

UDK 51(075.3)
Ma615

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos rekomenduota 2002 01 09 Nr. 87

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

Darbo vadovas *Vilius Stakėnas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys, Valdas Vanagas*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak, Rolandas Jakštys*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Nijolė Drazdauskienė*

Kalbos redaktorė *Diana Gustienė*

Konsultantai: *Marytė Stričkienė, Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

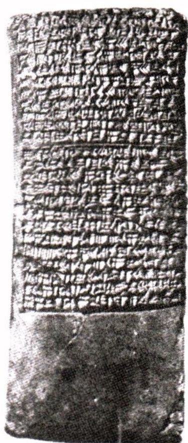
ISBN 9955–491–22–1 (1 dalis)
ISBN 9955–491–23–X (2 dalys)

Turinys

Įvadas: tiesiog matematika!

Sena kaip pati mintis

Tai apie matematiką. Prieš tūkstančius metų, kai susikūrė pirmosios Artimųjų Rytų, Egipto, Kinijos civilizacijos, atsirado ir pirmosios matematinės žinios. Juk reikėjo skaičiuoti mokesčius, duokles ir turtus, kad neįsiviešpatautų betvarkė ir maišatis! Šumerų žyniai ir raštininkai buvo ir pirmieji matematikai. Jie užrašydavo savo skaičiavimus įspausdami nendrės galu duobutes molinėse lentelėse. Išliko daug tokių molinių lentelių — šumerų ir babiloniečių raštijos pavyzdžių. Iššifravus pasirodė, kad daugelyje lentelių yra matematiniai skaičiavimai. Yra ir mokymuisi skirtų uždavinių rinkinių!



Molinėse šumerų lentelėse surašyti seniausi žinomi mums tekstai. Kai kurios lentelės parašytos daugiau kaip prieš 5 tūkstančius metų! Vienos lentelės visai mažos (5 cm × 5 cm), tarsi mūsų lapeliai su pastabomis, didžiausiųjų matmenys — 20 cm × 20 cm. 1898 – 1900 m. ekspedicijos Nipure metu surasta ištisa lentelių biblioteka, užėmusi 80 kambarių. Kai 1929 metais vokiečių matematikas O. Noigebaueris paskelbė kelis išverstus matematinius tekstus, visi labai nustebo. Babiloniečių moksleiviai taikė Pitagoro teoremą 1000 metų prieš patį Pitagorą, o spręsti kvadratines lygtis jiems buvo vienas juokas!

Molinės babiloniečių lentelės su matematiniais skaičiavimais

Kitus seniausius mums žinomus matematinius tekstus sukūrė egiptiečiai.
Tūkstančius metų Egipto civilizacija klestėjo Nilo dėka. Egiptiečiai jį garbino, kūrė jam himnus. „Nėra tokios klėties, į kurią tavo dovanos tilptų“, — sakoma vienoje Nilą šlovinančioje giesmėje. Tačiau Nilas kėlė egiptiečiams ir tam tikrų, sakytume, matematinių problemų. Liepos mėnesį patvindamas, atnešdamas vėsą, užliedamas nuo karščio įkaitusią žemę ir patręšdamas derlingu dumblu, kartu paslėpdavo ar sunaikindavo ir žemės sklypų ribas. Taigi vandenims atslūgus tekdavo iš naujo matuoti žemę ir atkurti tvarką. Ne tik žemės matavimo darbai reikalavo matematinių žinių. Faraonų ūkio darbų ir išteklių apskaita — tai juk dideli ir painūs skaičiavimai! O kur dar didžiosios egiptiečių fantazijos — piramidžių statyba!

Egiptiečiai savo skaičiavimus rašė papirusuose. Buvo ir mokymuisi skirtų tekstų, mes sakytume — vadovėlių. Toks yra Britanijos muziejuje saugomas Raindo papirusas — raštininko Ahmeso sudarytas uždavinių rinkinys. Šiame uždavinyne, skirtame tikriausiai raštininkams mokytis, yra daugiau kaip 80 uždavinių. Daugelis jų susiję su

kasdiene egiptiečių buitimi: javų ir maisto atsargomis, gyvulių šėrimu, tačiau yra ir grynai teorinio pobūdžio uždavinių.

Raindo papiruse yra netgi uždavinių, susijusių su aritmetine ir geometrine progresijomis. Štai vienas jų. Kartu tai tikriausiai pirmas žinomas matematikos istorijoje bandymas palengvinti sunkias mokymosi valandas žiupsneliu humoro. Pamėginkite jį išspręsti.

UŽDAVINYS. Yra septyni namai, kiekviename name gyvena septynios katės, kiekviena katė gali suėsti septynias peles, kiekviena pelė — septynias miežių varpas, iš kiekvienos varpos, pasėjus jos grūdus, gaunami septyni saikai grūdų. Kiek iš viso yra daiktų: namų, kačių, pelių, varpų ir grūdų saikų?

Matematika — tai sąvokos, teiginiai ir įrodymai

Artimųjų Rytų ankstyvųjų civilizacijų matematiką galėtume pavadinti taikomąja. Babilono ir Egipto raštininkams ir žyniams visų pirma rūpėjo patys veiksmai ir rezultatai, o ne jų pagrindimo būdai. Iš tiesų, jeigu dalijant pagal tam tikrą taisyklę visi gauna po lygiai, tai kam kvaršinti galvą, kodėl taip yra?

Tačiau visai kitaip pažinimo klausimus kėlė klasikinės graikų civilizacijos mąstytojai. Jiems ne tiek rūpėjo, kiek ir ko žmogus turi, bet apskritai — kas jis yra, kokia žmogaus padėtis pasaulyje ir kodėl būtent tokia?

Taigi ir matematines žinias jiems buvo svarbu ne tik kaupti ir taikyti, bet ir suprasti — kodėl jos yra teisingos. Matematinės žinios turėjo būti įrodytos. Beje, matematika graikiškai reiškia pažinimą apskritai.

Pirmuoju graikų išminčiumi, remiantis antikiniais šaltiniais, laikomas Talis (apie 625–546 m. pr. Kr.). Jis buvo ir vienas iš teorinės matematikos pradininkų. Amžininkai laikė jį daugelio matematinių teiginių atradėju. Kad ir tokio: skersmuo dalija skritulį į dvi lygias dalis. Naivu būtų manyti, kad prieš Talį žmonės galvojo, jog dalijant skritulį skersmeniu gaunamos skirtingos dalys. Tačiau jų žinios visada buvo praktinės — apie konkretų skritulį (pavyzdžiui, vežimo ratą) ir konkretų skersmenį. O Talio teiginys — apie visus skritulius — didelius ir mažus; tiesą sakant — apie skritulius, kuriuos tegalima įsivaizduoti, nes visiškai tiksliai apskritimo jokiomis priemonėmis nubrėžti neįmanoma!

Graikų matematika — visų pirma geometrija. Ne todėl, kad jiems teko ypatingai daug matuoti, tačiau todėl, kad labai anksti (Pitagoro mokykloje apie 500 m. pr. Kr.) buvo atskleista, jog skaičių nepakanka visiems dydžiams išreikšti. Iš tiesų, juk skaičiais buvo laikomi tik natūralieji skaičiai ir jų santykiai (trupmenos), tad kaipgi jais išreikšti, pavyzdžiui, vienetinio kvadrato įstrižainės ilgį?

Graikai sukūrė matematinių žinių dėstymo principus, kuriais mes ir dabar vadovaujamės. Prieš pradedant ką nors matematiškai tyrinėti, reikia tą objektą apibrėžti, t. y. išskirti iš objektų visumos. Pavyzdžiui, galime apibrėžti stačiakampį kaip keturkampį, kurio visi kampai statūs. Tačiau kas gi yra keturkampis? Tai daugiakampis, turintis keturis kampus. O kas gi tada yra daugiakampis? Graikai suprato, kad apibrėžimų

grandinės be galo tęsti negalima, kitaip ir tyrinėti iš viso nepradėsime. Reikia kažkur sustoti ir tiesiog be apibrėžimo išvardyti pradinius protui lengvai suvokiamus objektus. Geometrijoje šie pradiniai objektai — taškas, tiesė, plokštuma...

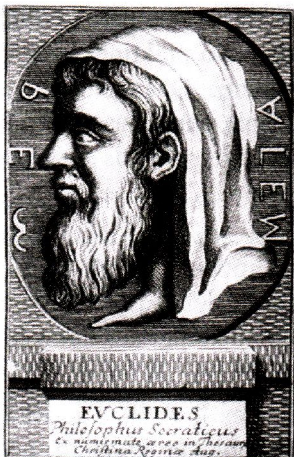
Taip pat negalime apibrėžti ir visų sąryšių tarp objektų, todėl tenka tiesiog išvardyti pagrindinius. Pavyzdžiui, geometrijoje neapibrėžiama, ką reiškia, kad taškas priklauso atkarpai. Priklauso, ir viskas! O sudėtingesnius sąryšius jau galima nusakyti naudojantis pagrindiniais. Pavyzdžiui, sąvoką „dvi atkarpos kertasi“ galime apibrėžti taip: „sakysime, kad dvi atkarpos kertasi, jeigu yra vienintelis taškas, priklausantis abiem atkarpoms“.

Objekto ar sąvokos apibrėžimas yra tarsi apsisprendimas, ką tyrinėti. O tyrinėti reiškia ieškoti naujų savybių, sąryšių, formuluoti teiginius. Ar suformuluotas teiginys tikrai yra teisingas? Matematikoje yra tik vienas būdas tuo įsitikinti ir įtikinti kitus — įrodyti suformuluotą teiginį.

Įrodydami teiginį, remiamės kitu, pastarojo įrodymui reikia dar kitų teiginių. Ir vėl tenka kur nors sustoti ir be įrodymo tiesiog išvardyti paprastus, protui akivaizdžius teiginius apie pradines sąvokas. Šie teiginiai vadinami aksiomomis. Štai keli pavyzdžiai iš geometrijos aksiomų sąrašo:

- per bet kuriuos du taškus galima nubrėžti tiktai vieną tiesę;
- bet kuris tiesės taškas dalija ją į dvi dalis;
- bet kuri plokštumos tiesė dalija ją į dvi dalis.

Taigi matematika prasideda pradinių sąvokų ir aksiomų išvardijimu. Nuo jų „kylama aukštyn“: duodami apibrėžimai, formuluojami ir įrodinėjami teiginiai. Įrodyti teiginiai matematikoje vadinami teoremomis (kartais teorema pavadinamas ir neįrodytas teiginys).



Matematikai dažnai mini Euklidą, tačiau apie jį žino labai mažai. Žinoma, kad jis apie 300 m. pr. Kr. gyveno Aleksandrijoje, mokė matematikos ir rašė matematinius veikalus. Matyt, teisinga sakyti, kad jis buvo geriausias visų laikų matematikos mokytojas. Savo veikale „Pradmenys“ jis taip gerai susistemino ir išdėstė matematikos (visų pirma — geometrijos) žinias, kad iš „Pradmenų“ buvo mokomasi daugiau kaip du tūkstančius metų!
Šaltiniai mini, kad tuomet Aleksandrijoje karaliavusiam Ptolemajui Euklidas paaiškinęs, kad geometrijai mokytis nėra ypatingo karališko būdo. Nėra paprasto, lengvo būdo ir mums!

Žymiausias klasikinės Graikijos matematikas Euklidas gyveno apie 325–265 m. pr. Kr.

Didingą taip išdėstytos matematikos pavyzdį pateikė graikų matematikas Euklidas. Jo geometrijos veikalas „Pradmenys“ yra dažniausiai po Šventojo Rašto leista Vakarų civilizacijos knyga. Tačiau šitaip dėstyti matematiką — ilgas ir sunkus kelias. Mūsų vadovėlyje ne visada juo einama. Kartais siūlome patikėti, kad suformuluotas teiginys yra teisingas, kartais įrodinėjame ne visiškai „griežtai“.

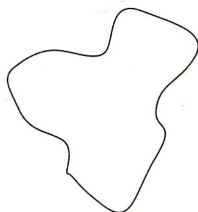
Teoremos matematikoje dažniausiai formuluojamos kaip sąlyginiai teiginiai: jei teisingas teiginys A, tai teisingas ir teiginys B. Pavyzdžiui: jeigu natūraliojo skaičiaus paskutinis skaitmuo yra 0 arba 5, tai natūralusis skaičius dalijasi iš 5. Čia teiginys A yra toks: „natūraliojo skaičiaus paskutinis skaitmuo yra 0 arba 5“, o B — „natūralusis skaičius dalijasi iš 5“. Dažnai teoremos formuluojamos trumpai, tarsi suliejant abu teiginius į vieną. Pavyzdžiui, Pitagoro teoremą žodžiais formuluojame taip: stačiojo trikampio įžambinės ilgio kvadratas lygus statinių ilgių kvadratų sumai. Tačiau galime tą pačią teoremą suformuluoti ir kitaip, aiškiai išskirdami teiginius A ir B: „jeigu trikampis yra statusis, tai ilgiausios jo kraštinės ilgio kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių ilgių kvadratų sumai“.

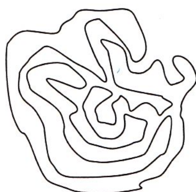
Tarkime, teorema yra suformuluota kaip sąlyginis teiginys: jeigu teisingas teiginys A, tai teisingas ir teiginys B. Tada galime sukeisti teiginius A ir B vietomis ir formuluoti *atvirkštinę teoremą*: jeigu teisingas teiginys B, tai teisingas ir teiginys A. Pavyzdžiui, teoremai „jeigu natūraliojo skaičiaus paskutinis skaitmuo yra 0 arba 5, tai natūralusis skaičius dalijasi iš 5“ atvirkštinę formuluojame taip: „jeigu natūralusis skaičius dalijasi iš 5, tai paskutinis natūraliojo skaičiaus skaitmuo yra 0 arba 5“. Žinome, kad šiuo atveju ir pradinė, ir jai atvirkštinė teoremos yra teisingos. Teisinga ir teorema, atvirkštinė Pitagoro teoremai: „jeigu ilgiausios trikampio kraštinės ilgio kvadratas yra lygus kitų kraštinių ilgių kvadratų sumai, tai trikampis yra statusis“. Tačiau gali būti ir taip, kad atvirkštinė teorema neteisinga.

1 užduotis. Suformuluokite atvirkštinę teoremą šiai teoremai: *jeigu taškas C nepriklauso tiesei, einančiai per taškus A ir B, tai $AC + BC > AB$.* Nustatykite, ar abi teoremos yra teisingos.

O dabar pakalbėkime apie matematinius įrodymus. Kartais matematikų polinkis viską įrodinėti kelia šypseną. Štai, pavyzdžiui, teiginys: *jeigu plokštumoje brėšime savęs nekertančią kreivę ir baigsime brėžti tame pačiame taške, kuriame pradėjome, tai ta kreivė padalys plokštumą į dvi dalis.*

— Būta čia ką įrodinėti! — pasakys kas nors.
— Juk tai akivaizdu! — ir nubrėš, pavyzdžiui, tokį brėžinį kaip kairėje.
— Ar iš tikrųjų akivaizdu? — suabejos galbūt kitas, pažiūrėjęs į brėžinį dešinėje.





Kaipgi įrodinėjami teiginiai? Graikų mąstytojai tyrinėjo ir šį klausimą. Didysis filosofas Aristotelis sukūrė logikos — mokslo apie teisingą mąstymą pagrindus. Pagrindinius logikos dėsnius mes visi žinome, tačiau tai nereiškia, kad visada mokame jais pasinaudoti.

Pavyzdžiui, turbūt sutiksite, kad negalima tuo pačiu metu miegoti ir nemiegoti. Negali būti vienu metu teisingas teiginys ir jo neiginys. Tai ***prieštaros dėsnis***, juo nuolat remiamasi matematikoje.

Tačiau kas nors galbūt paprieštaraus — kartais iš tikrųjų jaučiamės lyg miegotume ir kartu nemiegotume. Gyvenime ne viskas taip aišku ir griežta kaip matematikoje. Taigi teiginys ir jo neiginys abu negali būti teisingi. Tačiau abu klaidingi taip pat būti negali. Arba teiginys teisingas (pavyzdžiui, teiginys „skaičius 11^{100} dalijasi iš 3“), arba teisingas jo neiginys („skaičius 11^{100} nesidalija iš 3“). Trečios galimybės nėra. Tai ***negalimo trečiojo dėsnis***, taip pat labai svarbus matematikoje.

Nors nuo klasikinės graikų matematikos laikų praėjo daugiau kaip du tūkstančiai metų, mąstymo dėsniai ir metodai bemaž nepasikeitė.

Matematikoje — aibės visur

Matematikai visuomet nagrinėjo įvairių objektų rinkinius, arba sankaupas. Pavyzdžiui, galime įsivaizduoti visas plokštumos tieses, einančias per vieną tašką, arba visus lyginius skaičius. Tokie rinkiniai, arba sankaupos, matematikoje vadinami ***aibėmis***. Tie objektai, kurie įeina į aibę, vadinami jos ***elementais***. Kai tų elementų yra nedaug, galime aibę nusakyti tiesiog surašydami jos elementus arba jų vardus. Pavyzdžiui, užrašas

$$A = \{\text{birželis, liepa, rugpjūtis}\}$$

reiškia, kad aibė A sudaryta iš vasaros mėnesių. Tačiau jei tų elementų yra labai daug arba net be galo daug — visų juk nesurašysime. Tada galime aibę nusakyti žodžiais, nurodydami, kokią savybę turi turėti objektas, kad jis būtų „priimtas“ į aibę. Pavyzdžiui, natūraliųjų lyginių skaičių aibę L galime nusakyti taip: aibė L sudaryta iš natūraliųjų skaičių, kurie dalijasi iš 2.

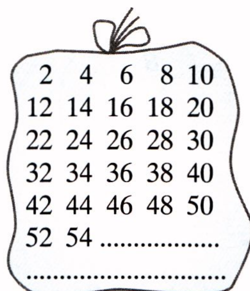
Jeigu a yra aibės A elementas, rašome $a \in A$; jeigu nėra, tai rašome $a \notin A$. Taigi, pavyzdžiui, $4 \in L$, $13 \notin L$.

Kartais aibė gali neturėti nei vieno elemento. Pavyzdžiui, tokia yra lygties $x^2 = -1$ sprendinių aibė. Aibę, neturinčią nei vieno elemento, vadiname tuščia ir žymime ženklu $\varnothing$. Kartais nustatyti, ar aibė tuščia, yra labai sunku.

Jei aibės elementų kiekis baigtinis, tai tokia aibė vadinama baigtine; jei aibės elementų yra be galo daug — sakome, kad tai begalinė aibė. Kartais begalinės aibės užrašomos išvardijant pirmuosius elementus, o vietoj kitų padedant daugtaškį. Taip rašoma tada, kai yra visiškai aišku, kaip surašytų aibės elementų eilę galima pratęsti. Pavyzdžiui, natūraliųjų lyginių skaičių aibę galima užrašyti taip:

$$L = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

Sudaryti aibę iš tam tikrų elementų — tai tarsi surinkti juos į vieną vietą. Galime įsivaizduoti, kad juos sudedame į permatomą maišelį — jie visi tebėra matomi, prieinami, tačiau sudaro visumą.

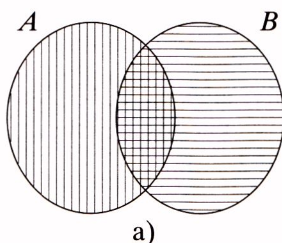


$L = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

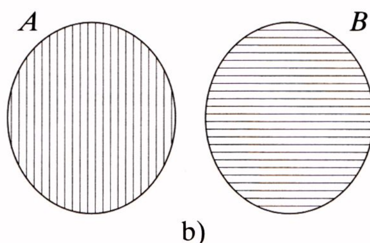
Aibės sąvoka atrodo tokia paprasta, kad tikriausiai nustebsite sužinoję, jog aibių teoriją tik XIX a. pabaigoje sukūrė vokiečių matematikas Georgas Kantoras (1845 – 1918).
Nejaugi anksčiau matematikai nenagrinėjo aibių? Aišku, nagrinėjo, tačiau tai buvo daugiausia baigtinės ir konkrečios — skaičių, taškų, figūrų aibės.
O Kantoras ryžosi nagrinėti begalines aibes. Ir atrado tokių keistų dalykų, kokių net nesusapnuotum!

Iš vienų aibių galime gauti kitas, kitaip tariant — su aibėmis galime atlikti veiksmus. Lengviausia juos paaiškinti piešiniais, kurie aibes vaizduoja plokštumos figūromis, o jų elementus — taškais. Tokie piešiniai matematikoje vadinami ***Veno diagramomis***.

Žemiau pavaizduotos dvi aibės A ir B: aibė A pavaizduota vertikaliai užbrūkšniuota figūra, B — užbrūkšniuota horizontaliai. Atveju a) aibės turi bendrų elementų, atveju b) — neturi.

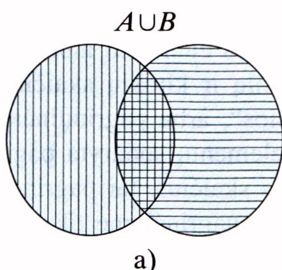


a)

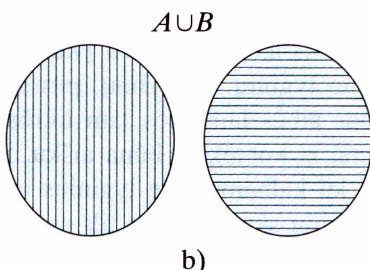


b)

Aibė, sudaryta iš visų tų elementų, kurie įeina bent į vieną iš aibių A, B, vadinama šių aibių ***sąjunga*** ir žymima $A \cup B$. Nuspalvinkime diagramomis pavaizduotų aibių sąjungas. Atveju b) sąjungą vaizduoja dvi atskiros dalys.

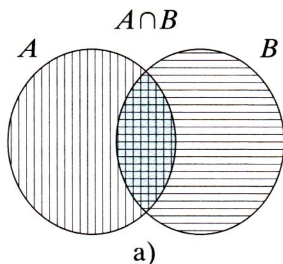


a)

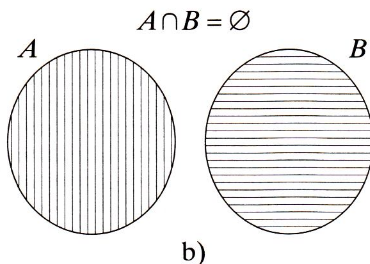


b)

Aibė, sudaryta tik iš tų elementų, kurie įeina ir į aibę A, ir į aibę B, vadinama šių aibių ***sankirta*** ir žymima $A \cap B$; jeigu nėra elementų, įeinančių į abi aibes, tai tų aibių sankirta yra tuščioji aibė. Diagramoje $A \cap B$ vaizduojanti figūra nuspalvinta. Atveju b) nėra ko spalvinti: sankirta yra tuščioji aibė.

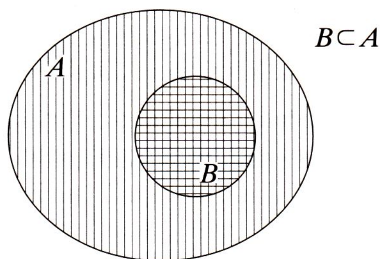


a)

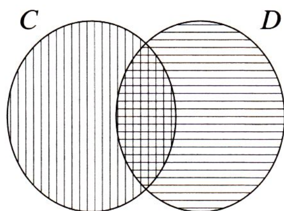


b)

Jei visi aibės B elementai įeina ir į aibę A, tai sakoma, kad aibė B yra aibės A ***poaibis***, ir žymima $B \subset A$.

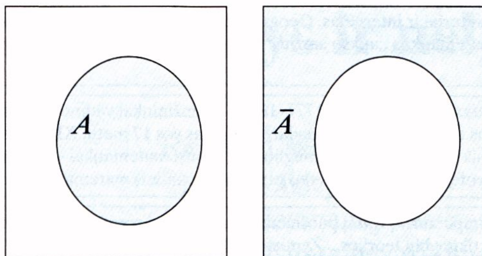


2 užduotis. Brėžinyje Veno diagramomis pavaizduotos dvi aibės C ir D. Akivaizdu, kad aibė C yra aibės $C \cup D$ poaibis, t. y. $C \subset C \cup D$. Sudarykite visas aibių D, $C \cup D$ ir $C \cap D$ poras. Kiekvienos poros aibes sujunkite poaibio ženklu.



Sprendžiant uždavinius tenka nagrinėti įvairias vienos rūšies elementų aibes. Pavyzdžiui, kalbame apie lyginių, nelyginių, pirminių, sudėtinių ir kitokių skaičių aibes. Visos nagrinėjamos aibės laikomos tam tikrõs „didžiõsios“, arba pagrindinės, aibės poaibiais. Paprastai iš konteksto būna aišku, iš kokių elementų sudaryta pagrindinė aibė. Pavyzdžiui, jei kalbame apie lyginius ir nelyginius skaičius, tai pagrindinė aibė sudaryta iš sveikųjų skaičių (arba tik natūraliųjų, jeigu nagrinėjame tik teigiamus skaičius). Jei kalbame apie mokinius, nešiojančius akinius, tai pagrindinę aibę sudaro visi mokiniai.

Aibės A ***papildiniu*** vadiname aibę, sudarytą iš tų pagrindinės aibės elementų, kurie neįeina į A. Aibės A papildinį žymime $\overline{A}$:



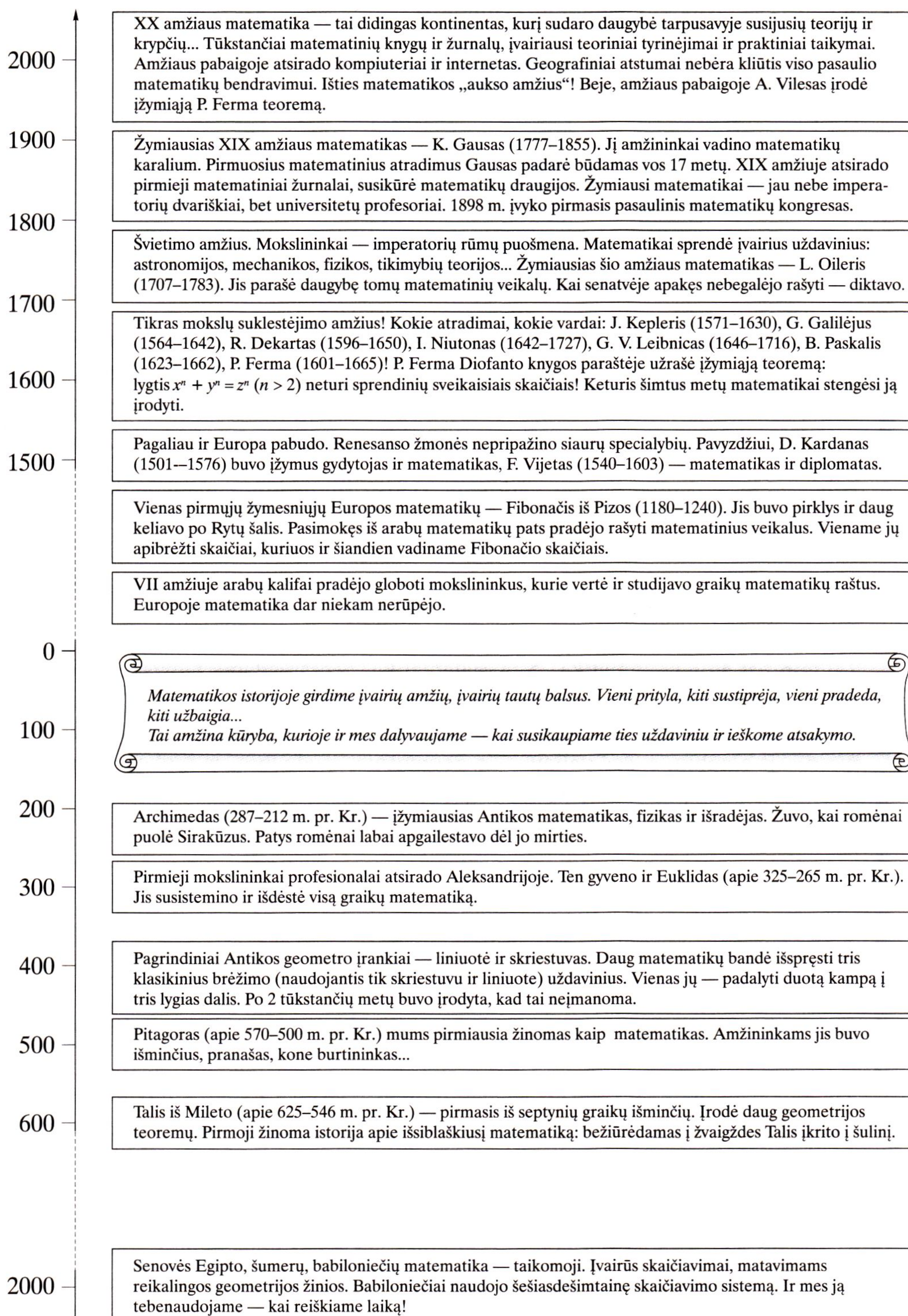
3 užduotis. Pagrindinė aibė — visų mokyklos moksleivių aibė, A — moksleivių, nešiojančių akinius, aibė, P — moksleivių, besimokančių prancūzų kalbos, aibė. Pasakykite žodžiais, kokie elementai sudaro aibes:

$A \cup P$, $A \cap P$, $\overline{A}$, $\overline{P}$, $\overline{A} \cup P$, $A \cup \overline{P}$, $\overline{A} \cap P$, $A \cap \overline{P}$, $(\overline{A \cup P})$, $(\overline{A \cap P})$.

Aibės ir jų veiksmai dažnai vartojami visose šiuolaikinės matematikos srityse. Jie padeda išdėstyti teiginius ir jų įrodymus trumpai ir aiškiai.

Nauja kaip pati mintis

Tai taip pat apie matematiką. Nes matematika, neprarasdama nieko iš paveldėtų turtų, nuolat atsinaujina — kelia naujus uždavinius, peržiūri senus metodus ir kaupia naujus rezultatus. Graikams matematika buvo kone vien tik geometrija, viduramžiais — geometrija ir algebra, o dar vėliau — ir geometrija, ir algebra, ir funkcijos, ir tikimybės. O dabar... puslapio neužtektų išvardyti visa, kas šių dienų matematikams rūpi.
Tačiau visų svarbiausia ir dabar — skaičiai. Tad nuo jų ir pradėsime.



XX amžiaus matematika — tai didingas kontinentas, kurį sudaro daugybė tarpusavyje susijusių teorijų ir krypčių... Tūkstančiai matematinių knygų ir žurnalų, įvairiausi teoriniai tyrinėjimai ir praktiniai taikymai. Amžiaus pabaigoje atsirado kompiuteriai ir internetas. Geografiniai atstumai nebėra kliūtis viso pasaulio matematikų bendravimui. Išties matematikos „aukso amžius"! Beje, amžiaus pabaigoje A. Vilesas įrodė įžymiąją P. Ferma teoremą.

Žymiausias XIX amžiaus matematikas — K. Gausas (1777–1855). Jį amžininkai vadino matematikų karalium. Pirmuosius matematinius atradimus Gausas padarė būdamas vos 17 metų. XIX amžiuje atsirado pirmieji matematiniai žurnalai, susikūrė matematikų draugijos. Žymiausi matematikai — jau nebe imperatorių dvariškiai, bet universitetų profesoriai. 1898 m. įvyko pirmasis pasaulinis matematikų kongresas.

Švietimo amžius. Mokslininkai — imperatorių rūmų puošmena. Matematikai sprendė įvairius uždavinius: astronomijos, mechanikos, fizikos, tikimybių teorijos... Žymiausias šio amžiaus matematikas — L. Oileris (1707–1783). Jis parašė daugybę tomų matematinių veikalų. Kai senatvėje apakęs nebegalėjo rašyti — diktavo.

Tikras mokslų suklestėjimo amžius! Kokie atradimai, kokie vardai: J. Kepleris (1571–1630), G. Galilėjus (1564–1642), R. Dekartas (1596–1650), I. Niutonas (1642–1727), G. V. Leibnicas (1646–1716), B. Paskalis (1623–1662), P. Ferma (1601–1665)! P. Ferma Diofanto knygos paraštėje užrašė įžymiąją teoremą: lygtis $x^n + y^n = z^n$ $(n > 2)$ neturi sprendinių sveikaisiais skaičiais! Keturis šimtus metų matematikai stengėsi ją įrodyti.

Pagaliau ir Europa pabudo. Renesanso žmonės nepripažino siaurų specialybių. Pavyzdžiui, D. Kardanas (1501––1576) buvo įžymus gydytojas ir matematikas, F. Vijetas (1540–1603) — matematikas ir diplomatas.

Vienas pirmųjų žymesniųjų Europos matematikų — Fibonačis iš Pizos (1180–1240). Jis buvo pirklys ir daug keliavo po Rytų šalis. Pasimokęs iš arabų matematikų pats pradėjo rašyti matematinius veikalus. Viename jų apibrėžti skaičiai, kuriuos ir šiandien vadiname Fibonačio skaičiais.

VII amžiuje arabų kalifai pradėjo globoti mokslininkus, kurie vertė ir studijavo graikų matematikų raštus. Europoje matematika dar niekam nerūpėjo.

Matematikos istorijoje girdime įvairių amžių, įvairių tautų balsus. Vieni prityla, kiti sustiprėja, vieni pradeda, kiti užbaigia...
Tai amžina kūryba, kurioje ir mes dalyvaujame — kai susikaupiame ties uždaviniu ir ieškome atsakymo.

Archimedas (287–212 m. pr. Kr.) — įžymiausias Antikos matematikas, fizikas ir išradėjas. Žuvo, kai romėnai puolė Sirakūzus. Patys romėnai labai apgailestavo dėl jo mirties.

Pirmieji mokslininkai profesionalai atsirado Aleksandrijoje. Ten gyveno ir Euklidas (apie 325–265 m. pr. Kr.). Jis susistemino ir išdėstė visą graikų matematiką.

Pagrindiniai Antikos geometro įrankiai — liniuotė ir skriestuvas. Daug matematikų bandė išspręsti tris klasikinius brėžimo (naudojantis tik skriestuvu ir liniuote) uždavinius. Vienas jų — padalyti duotą kampą į tris lygias dalis. Po 2 tūkstančių metų buvo įrodyta, kad tai neįmanoma.

Pitagoras (apie 570–500 m. pr. Kr.) mums pirmiausia žinomas kaip matematikas. Amžininkams jis buvo išminčius, pranašas, kone burtininkas...

Talis iš Mileto (apie 625–546 m. pr. Kr.) — pirmasis iš septynių graikų išminčių. Įrodė daug geometrijos teoremų. Pirmoji žinoma istorija apie išsiblaškiusį matematiką: bežiūrėdamas į žvaigždes Talis įkrito į šulinį.

Senovės Egipto, šumerų, babiloniečių matematika — taikomoji. Įvairūs skaičiavimai, matavimams reikalingos geometrijos žinios. Babiloniečiai naudojo šešiasdešimtainę skaičiavimo sistemą. Ir mes ją tebenaudojame — kai reiškiame laiką!

I Skaičiai ir reiškiniai, lygtys ir nelygybės



1. Realiųjų skaičių aibė

1.1. Sveikieji skaičiai

Skaičiuodami daiktus naudojame natūraliuosius skaičius. Bet kuriuos du skirtingus natūraliuosius skaičius galima palyginti: vienas jų yra mažesnis, kitas didesnis. Vienetas yra mažiausias natūralusis skaičius, o didžiausio natūraliojo skaičiaus nėra — kad ir kokį didelį natūralųjį skaičių imtume, pridėję vienetą gausime dar didesnį. *Natūraliųjų skaičių aibę* žymėsime

$$\boldsymbol{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}.$$

Dažniausiai natūraliuosius skaičius užrašome dešimtaine skaičiavimo sistema naudodami skaitmenis 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Pavyzdžiui, užrašas 658 reiškia, kad skaičių sudaro šeši šimtai, penkios dešimtys ir aštuoni vienetai:

$$658 = 6 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 8 \cdot 1 = 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8.$$

Skaitmenų eilė $a_k a_{k-1} ... a_1 a_0$ dešimtainėje skaičiavimo sistemoje reiškia skaičių

$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0.$$

Norėdami pabrėžti, kad tokia skaitmenų eilė nėra sandauga, kartais brėžiame virš jos brūkšnį:

$$\overline{a_k a_{k-1} ... a_0}.$$

Sudėdami ir daugindami natūraliuosius skaičius visada gauname natūraliuosius skaičius. Jei natūralusis skaičius n gaunamas padauginus natūralųjį skaičių k iš kito natūraliojo skaičiaus l, t. y. $n = k \cdot l$ ($l \in \boldsymbol{N}$), tai n vadinamas skaičiaus k kartotiniu, o k — skaičiaus n dalikliu. Aišku, kad n taip pat yra ir skaičiaus l kartotinis, o l yra skaičiaus n daliklis.

Pavyzdžiui, skaičius 10 yra skaičių 1, 2, 5, 10 kartotinis, šie skaičiai yra skaičiaus 10 dalikliai. Skaičius 1 turi vienintelį daliklį — patį save; visi kiti natūralieji skaičiai turi mažiausiai 2 daliklius. Pavyzdžiui, skaičiai 2, 3, 5, 7 turi po 2 daliklius, skaičius 4 turi 3 daliklius, o skaičiai 6, 8 — po 4 daliklius.

Jei skaičius turi lygiai du daliklius, jis vadinamas pirminiu, jeigu daugiau kaip du — sudėtiniu.

Taigi skaičiai 2, 3, 5, 7 yra pirminiai, o skaičiai 4, 6, 8 — sudėtiniai. Skaičius 1 nėra nei pirminis, nei sudėtinis.

Bet kurį sudėtinį skaičių galima išskaidyti pirminių sandauga. Pavyzdžiui:

$$6 = 2 \cdot 3, \quad 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3.$$

Skaidymas pirminių skaičių sandauga praverčia ieškant dviejų natūraliųjų skaičių didžiausiojo bendrojo daliklio (DBD) arba mažiausiojo bendrojo kartotinio (MBK).

PAVYZDYS. Raskime skaičių 45 ir 54 DBD ir MBK.
Kadangi

$$45 = 3^2 \cdot 5,$$
$$54 = 2 \cdot 3^3,$$

tai

$$\mathrm{DBD}(45; 54) = 3^2 = 9,$$
$$\mathrm{MBK}(45; 54) = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270.$$

Jei natūralusis skaičius a yra didesnis už natūralųjį skaičių b, tai visada galima rasti natūralųjį skaičių x, kad $b + x = a$. Šį skaičių vadiname a ir b skirtumu ir žymime $a - b$. Sakome, kad skirtumas $a - b$ gautas iš a atėmus b. Kad galėtume užrašyti atimties veiksmo rezultatą, kai $a = b$, natūraliųjų skaičių aibę turime papildyti nuliu:

$$\boldsymbol{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}.$$

Kad iš a galėtume atimti b ir tada, kai $a < b$, t. y. kad galėtume rasti skaičių x, tenkinantį lygybę $b + x = a$, aibę $\boldsymbol{N}_0$ turime papildyti neigiamaisiais sveikaisiais skaičiais. Gautoji aibė vadinama *sveikųjų skaičių aibe*. Ją žymėsime

$$\boldsymbol{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}.$$

Bet kokius du sveikuosius skaičius galime sudėti, sudauginti, iš vieno atimti kitą.

Jei a ir b yra sveikieji skaičiai, tai jų suma $a + b$, skirtumas $a - b$ ir sandauga $a \cdot b$ yra taip pat sveikieji skaičiai.

Prisiminkime, kuo ypatingi sveikieji skaičiai 0 ir 1. Bet kokiam skaičiui a:

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot 1 = a.$$

Sveikųjų skaičių kartotinius ir daliklius apibrėžiame taip pat kaip natūraliųjų skaičių: jei $n = k \cdot l$ $(n, k, l \in \boldsymbol{Z})$, tai n vadiname skaičiaus k (o taip pat ir l) kartotiniu, o k, l — skaičiaus n dalikliais. Beje, neteigiamų skaičių daliklių ir kartotinių prisireikia retai.

Pratimai ir uždaviniai

1. a) Dviženklio skaičiaus vienetų skaitmuo yra trigubai didesnis už dešimčių skaitmenį. Sukeitę skaitmenis vietomis gausime skaičių, kuris 18 vienetų didesnis už pradinį. Koks yra pradinis skaičius?
b) Dviženklio skaičiaus vienetų skaitmuo dvigubai didesnis už dešimčių skaitmenį. Sukeitę skaitmenis vietomis gausime skaičių, kuris 27 vienetais didesnis už pradinį. Koks yra pradinis skaičius?

Nurodymas. Jeigu dviženklis natūralusis skaičius n užrašomas dešimtainiais skaitmenimis kaip $\overline{xy}$ ($x \neq 0$), tai $n = 10x + y$. Jeigu natūralusis skaičius n yra triženklis ir užrašomas dešimtainiais skaitmenimis $\overline{xyz}$ ($x \neq 0$), tai $n = 100x + 10y + z$.

---

2. a) Ar yra tokių dviženklių skaičių, kurių vienetų skaitmens ir dešimčių skaitmens skirtumas lygus 4, o sukeitus skaitmenis vietomis gaunamas skaičius, kuris 36 vienetais didesnis už pradinį?
b) Ar yra tokių dviženklių skaičių, kurių vienetų skaitmens ir dešimčių skaitmens skirtumas lygus 7, o sukeitus skaitmenis vietomis gaunamas skaičius, kuris 27 vienetais didesnis už pradinį?

3. Dviženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi 15. Iš šio skaičiaus atėmus 27 gaunamas skaičius, užrašytas tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka. Raskite pradinį skaičių.

4. Triženklis skaičius baigiasi skaitmeniu 3. Jei šį skaitmenį perkeltume į skaičiaus pradžią, tai gautasis skaičius būtų 27 vienetais didesnis už pradinį skaičių. Raskite pradinį skaičių.

5. Garsaus antrojo tūkstantmečio matematiko gimimo metų skaičius pasižymi tokiomis savybėmis:
1) jo skaitmenų suma lygi 21;
2) prie gimimo metų skaičiaus pridėję 5355 gauname atvirkščia tvarka parašytą gimimo metų skaičių.

Kuriais metais gimė šis matematikas? Gal žinote jo pavardę?

6. Raskite didžiausiąjį bendrąjį daliklį ir mažiausiąjį bendrąjį kartotinį šių skaičių:
a) 12 ir 18; b) 72 ir 108; c) 126 ir 147; d) 325 ir 250; e) 96 ir 528.

7. Raskite didžiausią triženklį skaičių, kuris:
a) dalijasi iš 3, o jo užrašas baigiasi 25;
b) dalijasi iš 18, o jo užrašas baigiasi 28.

8. a) Triženklis skaičius, kurio vidurinysis skaitmuo 1, dalijasi iš 45. Koks šis skaičius?
b) Keturženklis skaičius, kurio šimtų skaitmuo yra 9, o dešimčių skaitmuo — 7, dalijasi iš 45. Koks šis skaičius?

1.2. Racionalieji skaičiai

Jeigu sveikąjį skaičių a dalysime iš sveikojo skaičiaus b, $b \neq 0$, tai sveikąjį skaičių gausime tik tuomet, kai a yra b kartotinis, t. y. kai $a = b \cdot c$, kur c — taip pat sveikasis skaičius. Jei a nėra sveikojo skaičiaus b, $b \neq 0$, kartotinis, tai dalybos rezultatą užrašome santykiu $\frac{a}{b}$, reiškiančiu racionalųjį skaičių. Tas pats racionalusis skaičius gali būti užrašytas daugeliu būdų. Pavyzdžiui:

$$\frac{2}{3} = \frac{-2}{-3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \cdots; \qquad \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3} = \frac{-4}{6} = \frac{4}{-6} = \cdots.$$

Kai $a \in \boldsymbol{Z}$, o $b \in \boldsymbol{N}$, tai santykį $\frac{a}{b}$ vadiname *paprastąja* trupmena. Skaičių a vadiname trupmenos skaitikliu, b — vardikliu. Dažniausiai racionalusis skaičius užrašomas *nesuprastinama* paprastąja trupmena, t. y. trupmena, kurios skaitiklis ir vardiklis neturi didesnių už vienetą bendrųjų daliklių. Kai trupmena $\frac{a}{b}$ reiškia didesnį už vienetą racionalųjį skaičių, tai ji kartais užrašoma išskiriant sveikąją dalį. Pavyzdžiui,

$$\text{kadangi } \frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}, \text{ tai rašome } \frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}.$$

Kai paprastosios trupmenos skaitiklis yra neigiamas skaičius, įprasta minuso ženklą rašyti prieš trupmeną, pavyzdžiui, $\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$.

Bet kokį sveikąjį skaičių a taip pat galima užrašyti paprastąja trupmena $\frac{a}{1}$. Vadinasi, sveikieji skaičiai taip pat yra racionalieji skaičiai, juos galima užrašyti trupmenomis su vardikliais, lygiais 1.

Kiekvieną racionalųjį skaičių galima užrašyti vienintele nesuprastinama trupmena $\frac{a}{b}$, $a \in \boldsymbol{Z}, b \in \boldsymbol{N}$.

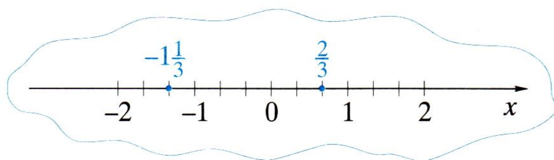
Racionaliųjų skaičių aibę žymėsime $\boldsymbol{Q}$. Aišku, kad sveikųjų skaičių aibė yra racionaliųjų skaičių aibės poaibis, t. y. $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$.

Nesunku įsitikinti, kad sudėdami, atimdami, daugindami ir dalydami du racionaliuosius skaičius (dalyti galima tik iš nelygių nuliui skaičių) visada gauname racionaliuosius skaičius.

Jeigu r ir s — racionalieji skaičiai, tai jų suma $r + s$, skirtumas $r - s$, sandauga $r \cdot s$ ir dalmuo $\frac{r}{s}$, kai $s \neq 0$, taip pat yra racionalieji skaičiai.

Racionaliuosius skaičius pavaizduokime tiesės taškais. Nubrėžkime tiesę, pasirinkime joje kryptį, tašką, kuris vaizduos skaičių 0, ir atkarpą, kurios ilgį laikysime lygiu 1. Atidėdami vienetines atkarpas tiesėje į dešinę ir į kairę nuo nulį atitinkančio taško gausime taškus, kuriuos atitiks sveikieji skaičiai: dešinėje nulio pusėje teigiamieji, kairėje — neigiamieji.

Norėdami pavaizduoti, pavyzdžiui, skaičių $\frac{2}{3}$ turime atkarpą tarp taškų, kurie vaizduoja skaičius 0 ir 1, padalyti į tris lygias dalis; atidedant skaičių $-1\frac{1}{3}$ į tris lygias dalis tektų dalyti atkarpą tarp skaičius -2 ir -1 atitinkančių taškų.



Tiesę, kurios taškais vaizduojame skaičius, vadinsime *skaičių tiese*.

Jeigu norėtume joje pavaizduoti visus teigiamus ir mažesnius už 1 racionaliuosius skaičius, kuriuos galima užrašyti trupmenomis su vardikliais, lygiais 1000, atkarpą tarp 0 ir 1 turėtume dalyti į 1000 lygių dalių. Taigi racionalieji skaičiai išsidėstę tiesėje labai tankiai. Tarp bet kokių dviejų skirtingus skaičius vaizduojančių tiesės taškų visada galima nurodyti be galo daug tos tiesės taškų, atitinkančių racionaliuosius skaičius.

Pratimai ir uždaviniai

9. Nustatykite, kuri iš dviejų trupmenų didesnė:

a) $\frac{3}{8}$ ar $\frac{1}{3}$; b) $-\frac{5}{12}$ ar $-\frac{4}{9}$; c) $\frac{7}{12}$ ar $\frac{5}{8}$; d) $-\frac{2}{3}$ ar $-\frac{7}{12}$.

10. Išspręskite lygtį:

a) $x+\frac{5}{6}=1\frac{2}{3}$; b) $3\frac{1}{3}-x=\frac{3}{4}$; c) $x-\frac{6}{7}=1\frac{3}{7}$;

d) $\frac{2}{3}x=1\frac{1}{3}$; e) $\frac{3}{4}x=-2\frac{1}{6}$; f) $-\frac{5}{6}x=\frac{3}{4}-1\frac{2}{3}$.

11. Apskaičiuokite:

a) $\left(2\frac{5}{9}+\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}$; b) $\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{19}{60}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}+\frac{4}{15}+\frac{2}{5}}\cdot 4\frac{4}{5}$; c) $\left(4\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right):\left(1\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right):\dfrac{2\frac{1}{4}+12}{\frac{3}{2}}$;

d) $\left(2\frac{1}{12}:1\frac{2}{3}+1\frac{3}{4}\right):1\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$; e) $\left(3\frac{1}{8}:1\frac{1}{4}+3{,}5\right):2\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$; f) $\dfrac{\frac{25}{27}\cdot\frac{3}{5}}{\left(\frac{41}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{1}{65}+\frac{1}{4}}$;

g) $\dfrac{\frac{1}{2}:2\frac{3}{4}}{\frac{7}{40}:\frac{7}{20}+\frac{7}{3}:\frac{217}{31}}$; h) $\dfrac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}$; i) $\dfrac{2}{1+\frac{3}{1+\frac{4}{5}}}$.

12. Apskaičiuokite x, jei:

a) $\dfrac{\frac{3}{10}+8\frac{2}{5}:4\frac{16}{17}}{x}=\dfrac{\left(2\frac{7}{10}-\frac{4}{5}\right)\cdot 2\frac{1}{3}}{\left(5\frac{1}{5}-\frac{7}{5}\right):\frac{3}{70}}$; b) $\dfrac{\frac{3}{10}+8\frac{2}{5}:4\frac{16}{17}}{x}=\dfrac{2\frac{4}{9}:\left(4\frac{1}{5}\cdot 3\frac{1}{3}:1\frac{10}{11}\right)}{\left(4\frac{1}{5}:\frac{3}{10}\right):6}$;

c) $\dfrac{\left(6\frac{3}{5}-3\frac{3}{4}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{\left(5\frac{3}{4}+13\frac{1}{2}\right):2\frac{1}{2}}=\dfrac{x\cdot 4\frac{3}{14}}{\left(1\frac{3}{5}+5\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{5}{8}}$; d) $\dfrac{1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8\frac{9}{10}-2\frac{3}{5}:\frac{2}{3}\right)}{\frac{2}{5}+8\cdot\left(5-\frac{4}{5}:\frac{8}{5}\right)-5:2\frac{1}{2}}=\dfrac{90}{x\cdot\left(35\frac{3}{5}-\frac{6}{5}\right)}$.

1.3. Dešimtainės trupmenos

Trupmenos, kurių vardikliai yra dešimties laipsniai, vadinamos *dešimtainėmis*. Jas galima užrašyti be trupmenos brūkšnio, nurodant tik sveikąją dalį ir skaitiklį bei atskiriant šiuos skaičius kableliu. Pavyzdžiui:

$$\frac{8}{10} = 0{,}8; \quad 1\frac{12}{100} = 1{,}12; \quad -\frac{1}{100} = -0{,}01.$$

Pabrėždami, kad tokioms trupmenoms užrašyti pakanka baigtinės skaitmenų eilės, jas vadinsime *baigtinėmis* dešimtainėmis trupmenomis. Jeigu paprastosios trupmenos vardiklio kuris nors kartotinis yra lygus dešimties laipsniui (tai teisinga, kai vardiklis yra skaičių 2 ir 5 laipsnių sandauga), tai šią trupmeną galima išreikšti baigtine dešimtaine. Pavyzdžiui:

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = 0{,}8; \quad 2\frac{1}{8} = 2\frac{125}{8 \cdot 125} = 2{,}125; \quad -\frac{2}{25} = -\frac{2 \cdot 4}{25 \cdot 4} = -0{,}08.$$

Dešimtainę trupmeną galima suprasti kaip racionaliojo skaičiaus užrašą dešimtainėje skaičiavimo sistemoje. Pavyzdžiui:

$$3{,}25 = 3 + \frac{25}{100} = 3 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100};$$
$$234{,}125 = 234 + \frac{125}{1000} = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}.$$

Reikšdami paprastąją trupmeną $\frac{a}{b}$ dešimtaine dažniausiai dalijame a iš b „kampu“.

Pabandykime išreikšti dešimtainėmis trupmenomis tokias trupmenas, kurių vardikliai nėra vien skaičių 2 ir 5 laipsnių sandaugos, pavyzdžiui, trupmenas: $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$. Dalydami skaitiklius iš vardiklių gausime:

$$\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots; \quad \frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots; \quad \frac{3}{7} = 0{,}428571428571428571\ldots$$

Taigi paprastąją trupmeną užrašant dešimtaine kartais prisireikia begalinės skaitmenų eilės, kurioje tam tikra skaitmenų grupė ima kartotis. Tada sakome, kad trupmeną užrašėme *begaline periodine* dešimtaine trupmena. Trumpinant užrašus paprastai pasikartojanti skaitmenų grupė (*periodas*) rašoma skliausteliuose, pavyzdžiui:

$$0{,}111\ldots = 0{,}(1); \quad 0{,}8333\ldots = 0{,}8(3); \quad 0{,}428571428571428571\ldots = 0{,}(428571).$$

Ar visuomet reikšdami paprastąją trupmeną dešimtaine gausime tik baigtinę arba begalinę periodinę dešimtainę trupmeną? O gal kartais galime gauti begalinę *neperiodinę* dešimtainę trupmeną, t. y. begalinę dešimtainę trupmeną, kurioje jokia skaitmenų grupė nesikartoja?

Imkime trupmeną, kurios negalima išreikšti baigtine dešimtaine, pavyzdžiui, $\frac{37}{14}$.

Dalykime 37 iš 14 „kampu“:

```
(1) _3 7 |1 4
     2 8   2,6 4 2 8 5 7 1 4...
(2)  _9 0
      8 4
(3)    _6 0
        5 6
(4)     _4 0
         2 8
(5)     _1 2 0
         1 1 2
(6)         _8 0
             7 0
(7)         _1 0 0
               9 8
(8)             _2 0
                 1 4
(9)              _6 0
                  5 6
                  _4 0
                   . . .
                   . . .
```

Šį dalybos procesą galima užrašyti ir tokių lygybių seka:

$37 = 14 \cdot 2 + 9$

$\mathbf{9 \cdot 10 = 14 \cdot 6 + 6}$

$6 \cdot 10 = 14 \cdot 4 + 4$

$4 \cdot 10 = 14 \cdot 2 + 12$

$12 \cdot 10 = 14 \cdot 8 + 8$

$8 \cdot 10 = 14 \cdot 5 + 10$

$10 \cdot 10 = 14 \cdot 7 + 2$

$\mathbf{2 \cdot 10 = 14 \cdot 1 + 6}$

$6 \cdot 10 = 14 \cdot 4 + 4$

. . . .

Dalydami gaudavome dalybos iš 14 liekanas, kurias daugindavome iš 10 ir vėl dalydavome iš 14. Tačiau dalijant iš 14 galima gauti tik trylika skirtingų liekanų $1, 2, \ldots, 13$. Taigi ne vėliau kaip keturioliktajame žingsnyje turi pasirodyti liekana, kuri jau buvo gauta anksčiau. Taip ir įvyko — antrą kartą jau turėtą liekaną 6 gavome aštuntajame žingsnyje. Aišku, kad tolesniuose žingsniuose liekanos vėl kartosis, todėl kartosis ir dešimtainės trupmenos skaitmenys. Taigi

$$\frac{37}{14} = 2{,}6(428571).$$

Panašiai būtų užrašant dešimtaine trupmena bet kokią kitą paprastąją trupmeną $\frac{a}{b}$ — gautume baigtinę arba begalinę periodinę dešimtainę trupmeną.

Kiekvieną racionalųjį skaičių galima užrašyti baigtine arba begaline periodine dešimtaine trupmena.

1 užduotis. Užrašykite paprastąsias trupmenas $\frac{13}{7}$, $\frac{53}{198}$ begalinėmis periodinėmis dešimtainėmis trupmenomis.

Teisingas ir atvirkštinis teiginys: kiekviena baigtinė arba begalinė periodinė dešimtainė trupmena reiškia racionalųjį skaičių, t. y. kiekvieną baigtinę arba begalinę periodinę dešimtainę trupmeną galima užrašyti paprastąja trupmena.

PAVYZDYS. Užrašykime begalinę dešimtainę trupmeną paprastąja:
a) $0,(2)$; b) $0,7(3)$; c) $0,12(5)$; d) $0,1(21)$; e) $0,(9)$.

a) Pažymėkime
$x = 0,(2)$. Padauginę abi lygybės $x = 0{,}222\ldots$ puses iš 10 gausime lygtį
$10x = 2{,}222\ldots = 2 + 0,(2)$.
Iš jos panariui atimkime pirmąją lygybę:
$10x - x = 2 + 0,(2) - 0,(2)$, t. y. $9x = 2$.
Iš čia gauname, kad $x = \frac{2}{9}$.

b) Pažymėję
$x = 0,7(3)$
ir padauginę abi lygybės puses iš 10 gausime lygtį
$10x = 7,(3)$.
Šią lygybę dar kartą padauginkime iš 10:
$100x = 73,(3)$.
Dabar iš antrosios lygties atimkime pirmąją:
$100x - 10x = 73,(3) - 7,(3)$, t. y. $90x = 66$.
Iš čia gauname: $x = \frac{66}{90} = \frac{11}{15}$.

c) Pažymėkime $x = 0,12(5)$. Tuomet
$100x = 12,(5)$ ir $1000x = 125,(5)$.
Iš čia gauname: $900x = 113$, $x = \frac{113}{900}$.

d) Pažymėkime $x = 0,1(21)$. Padauginę abi lygybės puses iš 10 gausime lygtį
$10x = 1,(21)$.
Šią lygybę dauginkime iš 100:
$1000x = 121,(21)$.
Atimkime iš jos anksčiau gautąją:
$1000x - 10x = 121,(21) - 1,(21)$, $990x = 120$.
Taigi $x = \frac{120}{990} = \frac{4}{33}$.

e) Pažymėkime $x = 0,(9)$. Gausime:
$10x = 9,(9)$; $9x = 9$, $x = 1$.

Kaip matome iš pavyzdžio e) dalies, skaičius 1 gali būti užrašytas begaline periodine dešimtaine trupmena: $1 = 0,(9)$! Panašiai yra su visais skaičiais, užrašomais baigtinėmis dešimtainėmis trupmenomis — juos galima užrašyti ir begalinėmis periodinėmis dešimtainėmis trupmenomis. Pavyzdžiui:

$$3{,}217 = 3{,}216(9); \quad 5{,}1 = 5{,}0(9).$$

2 užduotis. Patikrinkite šias lygybes pavyzdyje naudotu metodu.

Kita vertus, kiekvieną baigtinę dešimtainę trupmeną galime užrašyti begaline periodine ir kitaip. Pavyzdžiui,

$$5{,}1 = 5{,}100... = 5{,}1(0).$$

Toliau begalinių periodinių dešimtainių trupmenų su periodu 9 arba 0 nenagrinėsime — vietoj jų rašysime atitinkamas baigtines dešimtaines trupmenas.

Pratimai ir uždaviniai

13. Paprastąją trupmeną užrašykite dešimtaine trupmena:

a) $\frac{7}{25}$; b) $-\frac{7}{16}$; c) $\frac{13}{8}$; d) $-\frac{16}{125}$; e) $\frac{9}{75}$; f) $-\frac{90}{24}$.

14. Dešimtainę trupmeną užrašykite paprastąja nesuprastinama trupmena:

a) $0{,}125$; b) $-2{,}075$; c) $1{,}375$; d) $-0{,}725$; e) $3{,}12$; f) $-0{,}36$.

15. Begalinę periodinę dešimtainę trupmeną užrašykite paprastąja:

a) $2{,}(7)$; b) $0{,}9(1)$; c) $-3{,}(41)$; d) $-0{,}9(81)$; e) $5{,}27(832)$; f) $0{,}21(34)$.

16. Įrašę vietoj klausimų atitinkamus skaitmenis paverskite gautą begalinę periodinę dešimtainę trupmeną paprastąja:

a) 0,1(kelinta dabar mėnesio diena?);

b) 0,(kelintas dabar mėnuo?);

c) 1,(kiek tau metų?);

d) 2,1(kada įvyko Žalgirio mūšis?).

17. Nustatykite, kuris skaičius didesnis:

a) $\frac{1}{6}$ ar $0{,}1(6)$; b) $0{,}(4)$ ar $\frac{9}{20}$; c) $-\frac{7}{12}$ ar $-0{,}58(3)$;

d) $0{,}(63)$ ar $\frac{8}{11}$; e) $1{,}(31)$ ar $1{,}31$; f) $-1{,}23(4)$ ar $-1{,}234$;

g) $-1{,}8(9)$ ar $-1{,}9$; h) $2\frac{1}{5}$ ar $2{,}(2)$; i) $1{,}9(8)$ ar $1{,}8(9)$.

18. Apskaičiuokite:

a) $\frac{3{,}9\cdot 0{,}24:\frac{5}{16}}{(4{,}06-2{,}5)\cdot 3\frac{21}{25}}$; b) $\frac{1{,}34+0{,}5}{17{,}1(6)-\frac{11}{14}-\frac{2}{15}\cdot 2\frac{6}{7}}$; c) $99{,}(9)+9{,}(9)+0{,}(9)$.

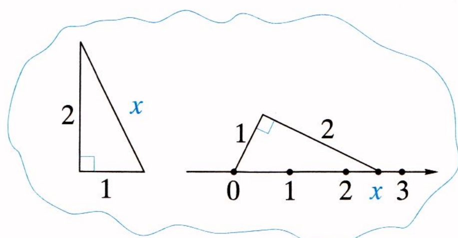
19. Apskaičiuokite:

a) $417\cdot\big(0{,}2+0{,}0(13)\big):\big(0{,}4+0{,}02(12)\big)$; b) $\frac{0{,}5(1)}{0{,}2(5)}+\frac{0{,}32(1)}{0{,}64(2)}$;

c) $\left(\frac{0{,}1(2)}{0{,}1(3)}-\frac{0{,}2(3)}{0{,}3(2)}\right)\cdot\frac{87}{311}$; d) $\left(\frac{0{,}6}{0{,}1(6)}+\frac{0{,}3(2)}{0{,}3(21)}\right)\cdot\frac{22}{0{,}(2)+0{,}2(6)}$.

1.4. Iracionalieji skaičiai

Atidėkime skaičių tiesėje teigiamą skaičių x, kuriuo reiškiame stačiojo trikampio įžambinės ilgį, kai vieno statinio ilgis lygus 1, o kito — 2. Tiesėje skaičių x vaizduojantį tašką rasime nubraižę ant jos statųjį trikampį.



Ne visų atkarpų ilgius galime išreikšti natūraliųjų skaičių santykiais!
Manoma, kad tai apie VI a. pr. Kr. pirmieji suprato pitagoriečiai. Šis atradimas juos labai sukrėtė. Juk keista, kad pasirinkę matavimo vienetą galime išmatuoti ne visų atkarpų ilgius!

Ar skaičius x yra racionalusis? Įsitikinkime, kad taip nėra.

Tarkime, kad x racionalusis skaičius. Tada jį galima užrašyti nesuprastinama paprastąja trupmena: $x = \frac{m}{n}$ $(m, n \in \boldsymbol{N})$. Remdamiesi Pitagoro teorema gauname:

$$x^2 = 1^2 + 2^2 = 5, \quad \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5, \quad m^2 = 5n^2.$$

Iš gautosios lygybės matome, kad skaičiaus m kvadratas dalijasi iš 5, taigi ir pats skaičius m dalijasi iš 5. Todėl atsiras toks kitas natūralusis skaičius k, kad $m = 5k$. Tada $(5k)^2 = 5n^2$ arba $5k^2 = n^2$. Ši lygybė rodo, kad ir skaičius n dalijasi iš 5, todėl jį galima užrašyti taip: $n = 5l$ $(l \in \boldsymbol{N})$. Nustatėme štai ką: jeigu skaičius x būtų racionalusis, tai nesuprastinamąją trupmeną, kuri reiškia šį skaičių, galėtume suprastinti, nes šios trupmenos ir skaitiklis, ir vardiklis dalytųsi iš 5. Tai akivaizdi prieštara, todėl skaičius x negali būti racionalusis.

Teigiamą skaičių x, tenkinantį lygybę $x^2 = 5$, vadiname kvadratine šaknimi iš 5 ir žymime $\sqrt{5}$.

Taigi nors racionalieji skaičiai skaičių tiesėje išsidėstę labai tankiai, visos tiesės jie neužpildo. Joje yra vietos ir skaičiui $\sqrt{5}$, ir daugeliui kitų skaičių, kurie nėra racionalūs.

APIBRĖŽIMAS
Skaičiai, kurie nėra racionalieji (nėra išreiškiami baigtinėmis arba begalinėmis periodinėmis dešimtainėmis trupmenomis), vadinami iracionaliaisiais.

1 užduotis. Samprotaudami panašiai kaip skaičiaus $\sqrt{5}$ atveju įrodykite, kad skaičiai $\sqrt{2}$ ir $\sqrt{6}$ yra iracionalieji.

Racionaliuosius skaičius galima užrašyti paprastosiomis trupmenomis ir baigtinėmis ar begalinėmis periodinėmis dešimtainėmis trupmenomis. O kaipgi galime reikšti

iracionaliuosius skaičius? Patyrinėkime skaičių $\sqrt{2}$. Šis skaičius nėra racionalusis ir yra tarp 1 ir 2:

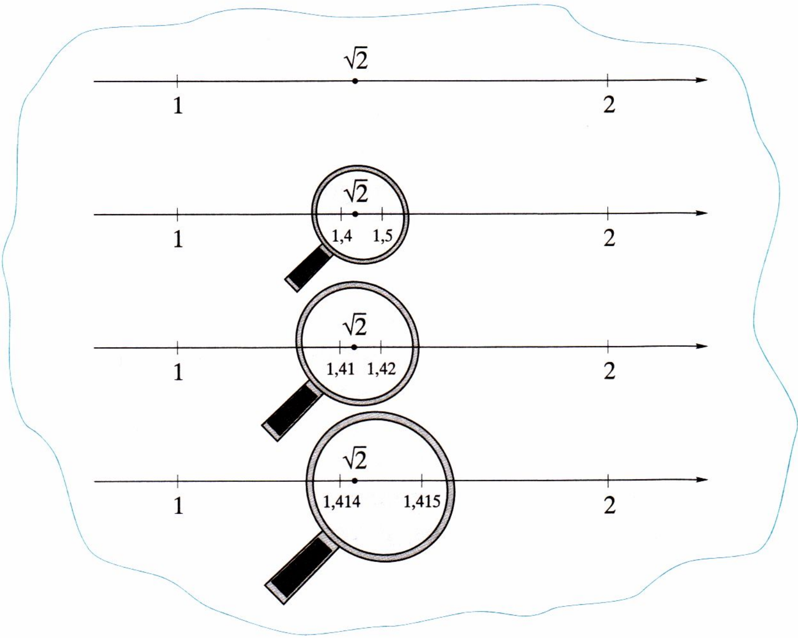
$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

Skaičių tiesės atkarpą tarp 1 ir $\sqrt{2}$ matuodami vienos dešimtosios ilgio atkarpėle gautume, kad keturių tokių atkarpėlių per mažai, o penkių — per daug:

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5.$$

Matuodami vienos šimtosios ilgio atkarpėle atstumą tarp 1,4 ir $\sqrt{2}$ gautume

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42.$$



Tęsdami procesą gautume vis tikslesnes nelygybes:

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415,$$
$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$1{,}41421356237 < \sqrt{2} < 1{,}41421356238,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Matome, kad kiekviename žingsnyje prie kairiosios nelygybės pusės dešimtainės trupmenos prirašomas vis naujas skaitmuo. Įsivaizduokime, kad matavimus tęsiame be galo. Gausime begalinę dešimtainę trupmeną, išreiškiančią skaičių $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356237\ldots$$

Ši trupmena negali būti periodinė, nes skaičius $\sqrt{2}$ nėra racionalusis. Panašiai elgdamiesi galime dešimtainėmis trupmenomis išreikšti ir kitus iracionaliuosius skaičius.

2 užduotis. Panašiai kaip skaičiui $\sqrt{2}$ parašykite keletą vis tikslesnių nelygybių su skaičiumi $\sqrt{3}$.

Racionalieji skaičiai reiškiami baigtinėmis arba begalinėmis periodinėmis dešimtainėmis trupmenomis, iracionalieji — begalinėmis neperiodinėmis dešimtainėmis trupmenomis. Racionalieji ir iracionalieji skaičiai vadinami realiaisiais.

Kiekvieną realųjį skaičių atitinka vienintelis skaičių tiesės taškas ir atvirkščiai — kiekvieną skaičių tiesės tašką atitinka realusis skaičius. Skaičių tiesės taškais į dešinę nuo nulio vaizduojami teigiamieji skaičiai, į kairę — neigiamieji.

Realiojo skaičiaus a modulis yra jį atitinkančio skaičių tiesės taško atstumas iki nulį atitinkančio taško. Jį žymime $|a|$. Skaičiaus modulį galima apibrėžti ir taip:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kai } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{kai } a < 0. \end{cases}$$

Jeigu skaičius yra iracionalusis, tuomet užrašydami jį dešimtaine trupmena negalime nei surašyti visų ženklų po kablelio, nei nurodyti periodo. Todėl skaičiavimuose vietoj iracionaliojo skaičiaus x naudojamas jo artinys — racionalusis skaičius a, apytiksliai lygus šiam skaičiui ($x \approx a$). Jeigu $a < x$, tai a vadinamas *artiniu su trūkumu*; jei $a > x$ — *artiniu su pertekliumi*. Pavyzdžiui, skaičiaus $\sqrt{2} = 1{,}41421356237...$ artinys su trūkumu galėtų būti $a = 1{,}4$, artiniu su pertekliumi galėtume laikyti skaičių $a = 1{,}5$. Galime parašyti ir tikslesnius skaičiaus $x = \sqrt{2}$ artinius — su trūkumu $a = 1{,}41$, su pertekliumi $a = 1{,}42$ arba dar tikslesnius.

Apskritimo ilgio ir jo skersmens ilgio santykis — skaičius π yra iracionalusis skaičius. Dažniausiai naudojame jo artinį su trūkumu: $\pi \approx 3{,}14$. Apytiksliai skaičiuodami kartais artinius naudojame ir vietoj racionaliųjų skaičių, pavyzdžiui, $0{,}1235 \approx 0{,}124$, $0{,}1235 \approx 0{,}12$, $0{,}1235 \approx 0{,}1$.

3 užduotis. Parašykite skaičiaus $\sqrt{3}$ keletą artinių su trūkumu ir su pertekliumi.

Realiojo skaičiaus x artinio *a absoliučiąja paklaida* vadinamas skaičių x ir a skirtumo modulis, t. y. $|x - a|$. Tikslios absoliučiosios paklaidos reikšmės mes dažniausiai nežinome, tačiau galime nustatyti skaičių $h > 0$, kurio ji neviršija. Tada sakome, kad *artinio a tikslumas* yra h. Tuomet yra teisingos nelygybės

$$|x - a| < h \quad \text{arba} \quad a - h < x < a + h.$$

Dažniausiai absoliučiajai paklaidai vertinti naudojame skaičius $h = 0{,}1$; $h = 0{,}01$; $h = 0{,}001$ ir t. t. Pavyzdžiui, skaičiaus $\sqrt{2} = 1{,}414213562373...$ artinio su trūkumu $1{,}41$ ir artinio su pertekliumi $1{,}42$ tikslumas yra $h = 0{,}01$.

Dažnai uždavinio sąlygoje nurodoma, kokiu tikslumu reikia pateikti atsakymą. Pavyzdžiui, jei reikalaujama užrašyti atsakymą $h = 0{,}001$ tikslumu, turime skaičių suapvalinti palikdami tris dešimtainius skaitmenis po kablelio:

$$1{,}2151... \approx 1{,}215; \quad 1{,}2101... \approx 1{,}210; \quad 1{,}2195... \approx 1{,}220.$$

Pratimai ir uždaviniai

20. Pasinaudoję stačiaisiais trikampiais realiųjų skaičių tiesėje atidėkite skaičius:

a) $\sqrt{10}$; b) $\sqrt{13}$; c) $\sqrt{17}$; d) $\sqrt{34}$; e) $\sqrt{8}$; f) $\sqrt{15}$; g) $\sqrt{21}$.

Nurodymas. Bet kokį racionalųjį skaičių skaičių tiesėje galime atidėti naudodamiesi tik skriestuvu ir liniuote. Šitaip galime atidėti ir kai kuriuos iracionaliuosius skaičius.
Jeigu nubraižysime, pavyzdžiui, statųjį trikampį, kurio abu statiniai lygūs 1, tai įžambinės ilgis bus lygus $\sqrt{2}$. Atidėję $\sqrt{2}$ ilgio atkarpą skaičių tiesėje rasime skaičių $\sqrt{2}$ atitinkantį tašką.
Jei nubraižysime statųjį trikampį, kurio vieno statinio ilgis lygus 1, o įžambinės — 2, tai kito statinio ilgis bus $\sqrt{3}$.

---

21. Kuris iš dviejų skaičių didesnis:

a) $\sqrt{10}$ ar 3; b) 7 ar $\sqrt{50}$; c) $-\sqrt{5}$ ar $-2{,}2$; d) $-3{,}6$ ar $-\sqrt{13}$;
e) $\sqrt{23}$ ar $\sqrt{17}+\sqrt{6}$; f) $\sqrt{15}$ ar $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; g) $\sqrt{21}$ ar $\sqrt{3}+\sqrt{7}$?

Nurodymas. Kartais nelengva palyginti du duotus skaičius, tačiau nesunku nustatyti, kurio skaičiaus kvadratas yra didesnis.

---

22. Tarp kurių gretimų sveikųjų skaičių yra šie skaičiai:

a) $\sqrt{15}$; b) $-\sqrt{17}$; c) $\sqrt{11}$; d) $-\sqrt{10}$; e) $\sqrt{3{,}6}$; f) $-\sqrt{12{,}2}$?

23. Suraskite dvi viena po kitos einančias dešimtaines trupmenas su vienu ženklu po kablelio, tarp kurių yra skaičius:

a) $\sqrt{5}$; b) $-\sqrt{3}$; c) $\sqrt{17}$; d) $-\sqrt{15}$.

24. Paprastąją trupmeną išreikškite dešimtaine ir suapvalinkite nurodytu tikslumu h:

a) $\frac{2}{3}$, $h = 0{,}01$; b) $\frac{1}{7}$, $h = 0{,}001$; c) $\frac{4}{11}$, $h = 0{,}0001$; d) $\frac{7}{13}$, $h = 0{,}000001$.

25. Iracionalųjį skaičių suapvalinkite 0,001 tikslumu:

a) $\sqrt{8}$; b) $\sqrt{10}$; c) $-\sqrt{11}$; d) $-\sqrt{15}$.

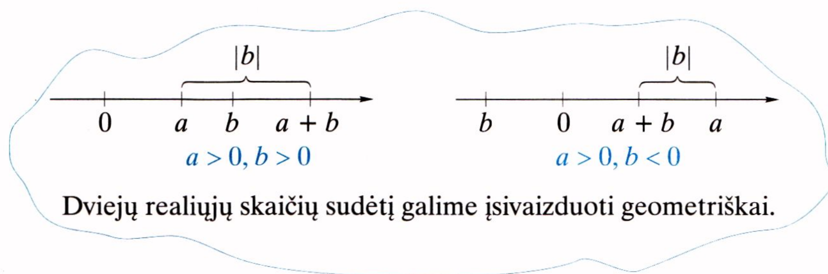
26. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę ir gautąjį rezultatą suapvalinkite nurodytu tikslumu h:

a) $\frac{3{,}6+4{,}5\cdot 23{,}4}{3{,}5\cdot 27{,}3-4{,}8}$, $h = 0{,}1$;
b) $\frac{3{,}5\cdot 2{,}7+4{,}5:3{,}2}{4{,}3-2{,}5\cdot 9{,}2}$, $h = 0{,}001$;
c) $3{,}(2) - 2{,}(3)$, $h = 0{,}01$;
d) $\frac{5{,}(6)}{6{,}(5)}$, $h = 0{,}01$.

1.5. Realieji skaičiai

Du racionaliuosius skaičius galima sudėti, atimti, dauginti, dalyti vieną iš kito (negalima dalyti tik iš nulio). Šiuos veiksmus galima atlikti ir tada, kai vienas ar abu skaičiai yra iracionalieji. Taigi sudėti, atimti ir dauginti galima bet kokius du realiuosius skaičius; bet kokį realųjį skaičių galima padalyti iš bet kokio kito nelygaus nuliui skaičiaus.

Jeigu a ir b — realieji skaičiai, tai jų suma $a+b$, skirtumas $a-b$, sandauga $a \cdot b$ ir dalmuo $\frac{a}{b}$, kai $b \neq 0$, irgi yra realieji skaičiai.



Dviejų realiųjų skaičių sudėtį galime įsivaizduoti geometriškai.

Realiųjų skaičių aibę žymėsime $\boldsymbol{R}$.

Realiųjų skaičių aritmetinių veiksmų savybės yra tos pačios, kaip ir racionaliųjų skaičių. Prisiminkime jas:

1) $a+b=b+a$ (sumos perstatymo dėsnis);
2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (sumos jungimo dėsnis);
3) $a \cdot b=b \cdot a$ (daugybos perstatymo dėsnis);
4) $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$ (daugybos jungimo dėsnis);
5) $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$ (daugybos skirstymo dėsnis);
6) su bet kokiu skaičiumi a teisingos lygybės $a+0=a$, $a \cdot 0=0$, $a \cdot 1=a$.

Bet kuriuos du realiuosius skaičius galime palyginti.

Jeigu skaičių a ir b skirtumas $a-b$ yra teigiamasis skaičius, tai sakome, kad a yra didesnis už b, ir rašome $a>b$. Jeigu skirtumas $a-b$ yra neigiamasis skaičius, tai sakome, kad a yra mažesnis už b, rašome $a<b$. Jei $a-b=0$, tai skaičiai a ir b yra lygūs: $a=b$.

PAVYZDYS. Palyginkime skaičius: a) $\frac{5}{6}$ ir $\frac{7}{9}$; b) $-\frac{7}{15}$ ir $-\frac{9}{20}$.

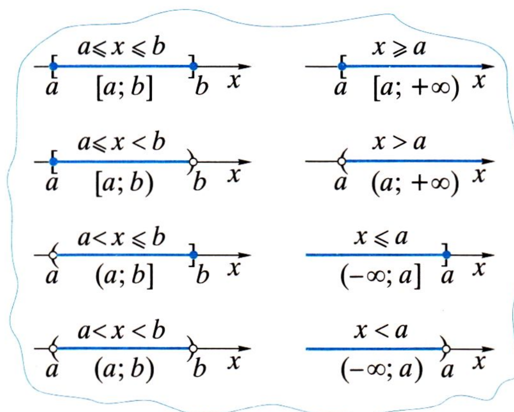
a) $\frac{5}{6}-\frac{7}{9}=\frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3}-\frac{7 \cdot 2}{9 \cdot 2}=\frac{1}{18}>0$, todėl $\frac{5}{6}>\frac{7}{9}$;

b) $-\frac{7}{15}-\left(-\frac{9}{20}\right)=-\frac{7 \cdot 4}{15 \cdot 4}+\frac{9 \cdot 3}{20 \cdot 3}=-\frac{1}{60}<0$, todėl $-\frac{7}{15}<-\frac{9}{20}$.

Lygindami skaičius vartojame ir „negriežtųjų“ nelygybių ženklus $\leqslant$, $\geqslant$, o kartais rašome ir dvigubas nelygybes.

Nelygybėmis patogu nusakyti, kokie skaičiai priklauso realiųjų skaičių aibės intervalams. Intervalai gali būti baigtiniai, begaliniai, uždarieji, atvirieji ir pusatviriai.

Realiųjų skaičių tiesėje pavaizduokime intervalus: $[a; b]$, $[a; b)$, $(a; b]$, $(a; b)$, $[a; +\infty)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; a]$, $(-\infty; a)$; čia $a < b$. Virš intervalų parašytos nelygybės, kurias tenkina visi to intervalo skaičiai.



Kodėl sakome „realieji skaičiai“, o ne tiesiog „skaičiai“? Daug šimtmečių taip ir buvo sakoma. Tačiau XVI amžiaus matematikai pradėjo galvoti apie kitokius skaičius, kuriems nėra vietos skaičių tiesėje, kurie netinka matavimų rezultatams reikšti. Norėdamas šiuos „įsivaizduojamus“ skaičius atskirti nuo įprastinių, tiesės taškais vaizduojamų skaičių, R. Dekartas pavadino pastaruosius realiaisiais.

Panagrinėkime, kaip skaičių lyginimas susijęs su aritmetiniais veiksmais. Teisingi tokie teiginiai:

1) jei $a < b$, o c — bet koks realusis skaičius, tai $a + c < b + c$;
2) jei $a < b$ ir $c > 0$, tai $a \cdot c < b \cdot c$;
   jei $a < b$ ir $c < 0$, tai $a \cdot c > b \cdot c$;
3) jei $a < b$ ir $c < d$, tai $a + c < b + d$, t. y. mažesniųjų skaičių suma yra mažesnė nei didesniųjų skaičių suma;
4) jei $a < b, c < d$ ir $a > 0, c > 0$, tai $a \cdot c < b \cdot d$, t. y. mažesniųjų teigiamų skaičių sandauga yra mažesnė nei didesniųjų skaičių sandauga;
5) jei $a < b$ ir $a > 0$, tai $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, t. y. mažesniojo teigiamo skaičiaus atvirkštinis skaičius yra didesnis negu didesniojo atvirkštinis.

Šias savybes galima įrodyti pasinaudojus aritmetinių veiksmų savybėmis.

Įrodykime, pavyzdžiui, 2 savybę. Kadangi $a < b$, tai $a - b < 0$. Tada $a \cdot c - b \cdot c = (a - b) \cdot c < 0$, nes abu dauginamieji yra skirtingų ženklų. Taigi $a \cdot c < b \cdot c$.

Įrodykime 4 savybę. Kadangi $a < b$ ir $c < d$, tai $a - b < 0$ ir $c - d < 0$. Mums reikia įrodyti, kad $ac < bd$, t. y. $ac - bd < 0$. Padidinkime skirtumą $ac - bd$ pakeisdami ac didesniu skaičiumi bc:

$$ac - bd < bc - bd = b(c - d).$$

Tačiau $b(c - d) < 0$, taigi ir $ac - bd < 0$, t. y. $ac < bd$.

Užduotis. Įrodykite skaičių lyginimo 1, 3, 5 savybes.

Pratimai ir uždaviniai

27. Apskaičiuokite:

a) $|\sqrt{5}-3|+|2-\sqrt{5}|$;

b) $|1-\sqrt{3}|+|2-\sqrt{3}|$;

c) $|2\sqrt{2}-3|-|\sqrt{2}-2|-|3-\sqrt{2}|$;

d) $\sqrt{3}-2+|1-\sqrt{2}|-|2-\sqrt{3}-\sqrt{2}|$.

28. Panaikinkite iracionalumą vardiklyje:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{18}}$; c) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$; d) $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$; e) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; f) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$;

g) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; h) $\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-2}$; i) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; j) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{7}}$.

Nurodymas. Kai trupmenos vardiklis yra iracionalusis skaičius, dažnai pravartu skaitiklį ir vardiklį padauginti iš tokio nelygaus nuliui skaičiaus, kad vardiklyje iracionalumo neliktų. Pavyzdžiui,
$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$.

29. Suprastinkite reiškinį:

a) $\frac{1+0,5\sqrt{2}}{1-0,5\sqrt{2}}+(1-\sqrt{2})^2$;

b) $\left(\frac{3}{2-\sqrt{7}}-\frac{2}{3+\sqrt{7}}+\frac{5}{4-\sqrt{11}}\right):\frac{6-\sqrt{11}}{\sqrt{11}-1}$;

c) $\left(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{28}{1-\sqrt{15}}\right)\cdot(6-\sqrt{3})$;

d) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+5}$.

30. Drenažo vamzdžio vidinis skersmuo 10 cm. Kiek vandens nutekės šiuo vamzdžiu per 2 valandas, jei srovės greitis 0,5 m/s ir vanduo užima trečdalį vamzdžio skerspjūvio ploto? Įrašę $\pi\approx 3{,}142$ vandens tūrį apskaičiuokite kubiniais metrais 0,1 tikslumu.

31. Traukinys, važiuodamas pastoviu greičiu, pakelės medį pravažiuoja per 7 s, o 100 m ilgio tunelį jis pravažiuoja per 20 s. Apskaičiuokite traukinio greitį (m/s) 0,01 tikslumu.

32. Trikampio kraštinių ilgiai yra $a=3{,}2$ cm, $b=5{,}3$ cm, $c=4{,}8$ cm. Apskaičiuokite trikampio plotą (cm^2) 0,1 tikslumu.

33. Į ritinio formos indą, kurio pagrindo skersmuo 8 cm, įpilta vandens. Į indą įmestas metalinis kubas, kurio tūris 125 cm^3. Vanduo kubą apsėmė. Kiek centimetrų pakilo vanduo įmetus kubą? Atsakymą pateikite 0,1 cm tikslumu.

2. Laipsniai ir šaknys

2.1. Laipsniai su sveikaisiais rodikliais

Kai dauginame lygius skaičius, sakome, kad skaičių keliame laipsniu.

APIBRĖŽIMAS
Realiojo skaičiaus a laipsniu su natūraliuoju rodikliu n vadinama sandauga
$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n}.$$
Skaičius a vadinamas laipsnio pagrindu, n — laipsnio rodikliu.

Užrašysime keletą laipsnių su natūraliaisias rodikliais savybių, kurias galima įrodyti pasinaudojus laipsnio apibrėžimu.

Tarkime, kad $m, n \in \boldsymbol{N}$, $a, b \in \boldsymbol{R}$. Tuomet teisingos tokios lygybės:

1) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$;

3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

4) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

5) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n)$.

Įrodykime 1 savybę. Naudodamiesi laipsnio su natūraliuoju rodikliu apibrėžimu ir sugrupavę dauginamuosius a ir b į atskiras grupes gausime:

$$(a \cdot b)^n = \overbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}^{n} = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n} \cdot \overbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}^{n} = a^n \cdot b^n.$$

Įrodykime 5 savybę. Pasirėmę laipsnio apibrėžimu, o po to suprastinę trupmeną gausime:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}} = a^{m-n} \quad (a \neq 0 \,\text{ir}\, m > n).$$

1 užduotis. Įrodykite laipsnių 2, 3 ir 4 savybes.

Laipsnių savybėmis naudojamės skaičiuodami skaitinių reiškinių su laipsniais reikšmes.

1 PAVYZDYS. $0{,}1^5 \cdot 10^5 = (0{,}1 \cdot 10)^5 = 1^5 = 1$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125} = 0{,}064$.

Panagrinėkime laipsnių 5 savybę:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n).$$

Jeigu norėtume ją taikyti su natūraliaisiais skaičiais $m \leqslant n$, turėtume apibrėžti laipsnius su nuliniu ir neigiamaisiais sveikaisiais rodikliais. Jeigu jie būtų apibrėžti taip, kad tenkintų šią savybę, tai paėmę $m = n = k$ gautume $\frac{a^k}{a^k} = a^0, 1 = a^0$, o paėmę $m = 1, n = k + 1$ gautume

$$\frac{a^1}{a^{k+1}} = a^{-k}, \quad \text{t. y.} \quad \frac{1}{a^k} = a^{-k}.$$

Pasinaudokime šiomis lygybėmis ir apibrėžkime laipsnius su nuliniu ir neigiamuoju sveikuoju rodikliu.

APIBRĖŽIMAS
Jei $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$, tai $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Taigi dabar laipsnio $a^n, a \neq 0$, rodiklis n gali būti bet kuris sveikasis skaičius, o 5 savybė teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais m ir n.

Galima įrodyti, kad kai $a \neq 0$ ir $b \neq 0$, aukščiau išvardytos laipsnių savybės galioja su visais sveikaisiais rodikliais m ir n.

Įrodykime, pavyzdžiui, 4 savybę. Ši savybė akivaizdi, kai bent vienas iš rodiklių yra nulis. Tegu vienas rodiklis yra teigiamas, o kitas neigiamas, pavyzdžiui, $m = 2$, $n = -3$. Įrodydami pasinaudosime laipsnių su sveikuoju neigiamu rodikliu apibrėžimu ir laipsnių 5 savybe, kuri teisinga su visais natūraliaisiais laipsnių rodikliais:

$$a^2 \cdot a^{-3} = \frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{2+(-3)}.$$

Taigi 4 savybė su $m = 2$, $n = -3$ yra teisinga. Visiškai taip pat savybę įrodome ir bendruoju atveju, t. y. kai vienas rodiklis yra bet koks teigiamasis, o kitas — neigiamasis sveikasis skaičius. Panašiai įrodinėjame ir tada, kai abu rodikliai neigiami.

2 užduotis. Įrodykite, kad kai $a \neq 0$, tai laipsnių 5 savybė teisinga su visais sveikaisiais skaičiais m, n. Išnagrinėkite visus atvejus: kai vienas rodiklis lygus nuliui, kai vienas neigiamas, kai abu neigiami.

Kai $a \neq 0$ ir $b \neq 0$, tai laipsnių 1–5 savybės teisingos su visais sveikaisiais skaičiais m ir n.

Laipsnių savybėmis patogu naudotis skaičiuojant reiškinių reikšmes.

2 PAVYZDYS.

1) $2^{-3} \cdot 5^{-3} = (2 \cdot 5)^{-3} = 10^{-3} = 0{,}001;$

2) $(2^{-3})^2 = 2^{(-3)\cdot 2} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64};$

3) $2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4;$

4) $\frac{3^{-2}}{3^{-3}} = 3^{-2-(-3)} = 3^1 = 3;$

5) $\left(9 \cdot 3^{-2} + 4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right) : \left(5^0 + \frac{1}{12}\right) = \left(9 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) : \left(1 + \frac{1}{12}\right) =$

$= \left(1 + 4 \cdot \frac{25}{4}\right) : \frac{13}{12} = 26 \cdot \frac{12}{13} = 24.$

Laipsniai su sveikaisiais rodikliais naudojami užrašant didelius ir mažus skaičius standartine išraiška.

APIBRĖŽIMAS

Jei skaičius a išreikštas kaip $b \cdot 10^m$, kur $1 \leqslant |b| < 10$, $m \in \mathbf{Z}$, tai $b \cdot 10^m$ vadinama standartine skaičiaus a išraiška; laipsnio rodiklis m vadinamas skaičiaus eile.

Pavyzdžiui:

$523\,000\,000 = 5{,}23 \cdot 10^8$; $\quad 0{,}000013 = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$; $\quad -4\,891\,000 = -4{,}891 \cdot 10^6$.

Kai skaičius b nėra sveikasis, tai jis užrašomas dešimtaine trupmena, kuri dažnai suapvalinama. Standartinė skaičiaus išraiška patogi užrašant įvairius fizikinius dydžius: planetų mases, atomų ar molekulių skersmenis ir t. t.

Pratimai ir uždaviniai

34. Apskaičiuokite:

a) $8 \cdot 4^{-3}$; b) $18 \cdot (-9)^{-1}$; c) $2^{-3} - (-2)^{-4}$; d) $0{,}5^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$;

e) $0{,}2^0 - 0{,}1^{-4}$; f) $16 \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^{-2}$; g) $-25 \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)^{-4}$; h) $0{,}125^{-2}$; i) $1{,}5^{-4}$;

j) $(-1{,}625)^{-1}$; k) $\frac{4^{-2} \cdot 8^{-5}}{2^{-22}}$; l) $\frac{3^{-10} \cdot 9^6}{(-3)^2}$; m) $\frac{(-5)^{-5} \cdot 25^{16}}{125^8}$.

35. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę ir rezultatą užrašykite standartine išraiška:

a) $\frac{3{,}1 \cdot 10^{10}}{2{,}5 \cdot 10^{-5}} \cdot 0{,}05$; b) $(2{,}1 \cdot 10^{-7}) \cdot (9{,}5 \cdot 10^8)$; c) $\frac{7{,}8 \cdot 10^{-8}}{0{,}25 \cdot 10^{-9}} + \frac{0{,}15}{2 \cdot 10^{-3}}$;

d) $(8{,}5 \cdot 10^7) : (2{,}5 \cdot 10^{14}) + 3 \cdot 10^{-7}$; e) $(2{,}4 \cdot 10^{-5}) : (3 \cdot 10^2) - 4 \cdot 10^{-6}$.

36. Šviesos greitis beorėje erdvėje lygus $3 \cdot 10^8$ m/s. Kokį atstumą (kilometrais) šviesa nusklis:

a) per 1 valandą; b) per 1 parą; c) per 1 milisekundę?

37. Atstumas nuo Saulės iki Žemės yra $1{,}495 \cdot 10^8$ km. Plutonas nutolęs nuo Saulės 40 kartų toliau nei Žemė.

a) Koks atstumas nuo Saulės iki Plutono?

b) Apskaičiuokite atstumą nuo Saulės iki Merkurijaus, jei žinoma, kad jis yra 2,6 karto mažesnis už atstumą nuo Saulės iki Žemės.

38. Žemės masė lygi $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, Merkurijaus — $3{,}17 \cdot 10^{23}$ kg, o Jupiterio — $1{,}90 \cdot 10^{27}$ kg.

a) Kiek kartų Merkurijaus masė yra mažesnė už Žemės masę?

b) Kiek kartų Jupiterio masė yra didesnė už Merkurijaus masę?

39. Vandens molekulės masė lygi $2{,}99 \cdot 10^{-26}$ kg. Kiek molekulių yra 1 m^3 vandens?

40. Šilumos kiekis matuojamas džauliais (J) arba kilodžauliais (1 kJ $=$ 1000 J). Šilumos kiekis, kurį išskiria visiškai sudegdamas 1 kg kuro, vadinamas kuro degimo šiluma. Kiek tonų akmens anglies reikia sudeginti norint gauti $5{,}1 \cdot 10^{12}$ kJ šilumos, jeigu akmens anglies degimo šiluma yra $3{,}0 \cdot 10^7\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$?

2.2. *n*-tojo laipsnio šaknys

Jei žinome kvadrato plotą, pavyzdžiui, $S = 5$, tai kvadrato kraštinę x randame iš lygties $x^2 = 5$. Jeigu žinome kubo tūrį, pavyzdžiui, $V = 5$, tai kubo kraštinės x ieškome iš lygties $x^3 = 5$. Sakome, kad pirmuoju atveju iš skaičiaus 5 traukiame antrojo, antruoju atveju — trečiojo laipsnio šaknį. Apibrėšime bet kokio laipsnio šaknį iš neneigiamųjų skaičių.

APIBRĖŽIMAS

Tegu $a \geqslant 0$, o $n \geqslant 2$ — natūralusis skaičius. Neneigiamas realusis skaičius b, su kuriuo galioja lygybė $b^n = a$, vadinamas n-tojo laipsnio šaknimi iš a.
n-tojo laipsnio šaknis iš a žymima $\sqrt[n]{a}$, skaičius a vadinamas pošakniu, n — šaknies rodikliu.

Taigi $\sqrt[n]{a}$ ($a \geqslant 0$, $n \in \boldsymbol{N}$) reiškia neneigiamąjį skaičių, kuriam teisinga lygybė $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Pavyzdžiui:

$$\sqrt[4]{16} = 2, \text{ nes } 2^4 = 16; \quad \sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1, \text{ nes } (0{,}1)^3 = 0{,}001.$$

Antrojo laipsnio šaknys paprastai vadinamos kvadratinėmis šaknimis, o trečiojo laipsnio šaknys — kubinėmis šaknimis.

Tegu dabar $a < 0$, pavyzdžiui, $a = -2$. Aišku, kad nėra tokio skaičiaus b, kad būtų teisinga lygybė $b^2 = -2$, nes keldami skaičius kvadratu gauname tik neneigiamus skaičius. Apskritai jei $a < 0$, o $n = 2m$ ($m \in \boldsymbol{N}$), t. y. n — lyginis skaičius, tai nėra tokio skaičiaus b, kad būtų teisinga lygybė $b^n = a$. Todėl lyginio laipsnio šaknies iš neigiamų skaičių neapibrėžiame.

Panagrinėkime lygybę $b^n = a$, kai $a < 0$, o n — nelyginis skaičius. Pavyzdžiui, lygybė $b^3 = -8$ teisinga, kai $b = -2$. Daugiau skaičių, su kuriais ši lygybė būtų teisinga, nėra.

Apskritai jei $a < 0$, o $n = 2m + 1$ ($m \in \boldsymbol{N}$), t. y. n — nelyginis, tai yra vienintelis skaičius b ($b < 0$), kad $b^n = a$. Taigi nelyginio laipsnio šaknį galime apibrėžti ir iš neigiamų skaičių.

APIBRĖŽIMAS
Tegu $a < 0$, o $n > 2$ — nelyginis natūralusis skaičius. Neigiamas skaičius b, su kuriuo galioja lygybė $b^n = a$, vadinamas n-tojo laipsnio šaknimi iš a. Šis skaičius žymimas $\sqrt[n]{a}$.

Pavyzdžiui:

$$\sqrt[3]{-8} = -2; \quad \sqrt[5]{-0{,}00001} = -0{,}1.$$

Taigi lygybė $\left(\sqrt[2m+1]{a}\right)^{2m+1} = a$ ($m \in \boldsymbol{N}$) teisinga su visais realiaisiais skaičiais a. Kadangi $\sqrt[3]{-8} = -2$, o $\sqrt[3]{8} = 2$, tai $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$. Tai teisinga ir bendruoju atveju: jei n — nelyginis skaičius, o $a > 0$, tai $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, t. y.

$$\sqrt[2m+1]{-a} = -\sqrt[2m+1]{a} \quad (m \in \boldsymbol{N}).$$

Kai $a \geqslant 0$, tai $\sqrt[n]{a}$ turi prasmę su visais natūraliaisiais n ($n \geqslant 2$).
Kai $a < 0$, tai $\sqrt[n]{a}$ turi prasmę tik su nelyginiais natūraliaisiais n ($n \geqslant 3$).

Kadangi lyginio laipsnio šaknis galima traukti tik iš neneigiamų skaičių, o nelyginio laipsnio šaknys iš neigiamų skaičių išreiškiamos šaknimis iš teigiamų skaičių, tai pakanka išnagrinėti šaknų $\sqrt[n]{a}$ savybes, kai $a \geqslant 0$.

Tegu n ir k — bet kurie didesni už vienetą natūralieji skaičiai, o a ir b — neneigiami realieji skaičiai. Šaknys turi tokias savybes:

1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$;

3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$;

4) $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$;

5) $\sqrt[n \cdot k]{a^k} = \sqrt[n]{a}$.

Įrodant šias savybes naudojamasi laipsnių su natūraliaisiais rodikliais savybėmis.

Įrodykime 1 savybę. Turime patikrinti, ar skaičius $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ tenkina šaknies apibrėžimo sąlygą, t. y. ar $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n = a\cdot b$. Pasinaudoję laipsnių su natūraliaisiais rodikliais savybe gauname:

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a\cdot b.$$

Įrodykime 5 savybę. Reikia įsitikinti, kad $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n\cdot k} = a^k$. Iš tikrųjų, keldami $\sqrt[n]{a}$ laipsniu $n\cdot k$ gausime:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n\cdot k} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = a^k.$$

Iš 5 savybės išplaukia, pavyzdžiui, kad $\sqrt{a} = \sqrt[10]{a^5}$, $\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}$ (kai $a \geqslant 0$) ir t. t.

Užduotis. Panašiai samprotaudami įrodykite šaknų 2, 3 ir 4 savybes.

Šaknų savybėmis naudojamės pertvarkydami ir prastindami skaitinius reiškinius.

1 PAVYZDYS. Suprastinkime skaitinį reiškinį:

$$\sqrt[4]{32\cdot\sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{2^5\cdot\sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{2^5}\cdot\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[12]{4} =$$
$$= 2\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[12]{4} = 2\cdot\sqrt[12]{2^3}\cdot\sqrt[12]{4} = 2\cdot\sqrt[12]{8\cdot 4} = 2\sqrt[12]{32}.$$

Panagrinėkime, kaip reikia prastinti reiškinį $\sqrt[n]{a^n}$. Įsižiūrėkime į dvi akivaizdžias lygybes: $\sqrt{2^2} = 2$, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$. Pirmuoju atveju prastinant pakako nubraukti laipsnio rodiklį ir šaknį, antruoju atveju reikia dar ir pakeisti laipsnio pagrindo ženklą. Apskritai $\sqrt{a^2} = a$, kai $a \geqslant 0$, ir $\sqrt{a^2} = -a$, kai $a < 0$. Trumpai tai galima užrašyti taip: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Panaši lygybė teisinga ir kitiems lyginiams laipsniams:

$$\sqrt[2m]{a^{2m}} = |a|, \quad m \in \boldsymbol{N},\ a \in \boldsymbol{R}.$$

Panagrinėkime kubines šaknis: $\sqrt[3]{2^3} = 2$ ir $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$. Lygybė $\sqrt[3]{a^3} = a$ teisinga ne tik šiuo atveju, bet ir su visais skaičiais a. Tą pačią savybę turi visos nelyginių laipsnių šaknys:

$$\sqrt[2m+1]{a^{2m+1}} = a, \quad m \in \boldsymbol{N},\ a \in \boldsymbol{R}.$$

2 PAVYZDYS. Apskaičiuokime:

$$\frac{\sqrt[5]{(-2)^2\cdot(-2)^3}\cdot\sqrt{(-2)^{-2}}}{\sqrt[3]{27\cdot(-2)^3}} = \frac{\sqrt[5]{(-2)^5}\cdot\sqrt{(-2)^{-2}}}{\sqrt[3]{3^3\cdot(-2)^3}} = \frac{(-2)\cdot\left|(-2)^{-1}\right|}{3\cdot(-2)} = \frac{1}{6}.$$

Pratimai ir uždaviniai

41. Apskaičiuokite:

a) $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[3]{343}$; $\sqrt[3]{512}$;   b) $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt[10]{1024}$;

c) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$; $\sqrt[5]{\frac{243}{1024}}$; $\sqrt[6]{\frac{1}{729}}$;   d) $\sqrt[3]{0,125}$; $\sqrt[4]{0,0625}$; $\sqrt[6]{0,000001}$.

42. Apskaičiuokite:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}$; $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$;   b) $\sqrt[4]{24}\cdot\sqrt[4]{54}$; $\sqrt[5]{48}\cdot\sqrt[5]{162}$; $\sqrt[3]{75}\cdot\sqrt[3]{45}$;

c) $\sqrt{24}:\sqrt{6}$; $\sqrt{72}:\sqrt{8}$; $\sqrt[3]{320}:\sqrt[3]{5}$;   d) $(\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{36}):\sqrt[6]{6}$.

43. Suprastinkite:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{50}$;   b) $\sqrt{12}-\sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{75}+\sqrt{108}$;

c) $\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+6\sqrt[3]{128}$;   d) $\sqrt[4]{162}+\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{32}$.

44. Apskaičiuokite:

a) $\sqrt[5]{-32}$; b) $\sqrt[3]{-729}$; c) $\sqrt[4]{-16}$; d) $\sqrt[3]{\frac{(-3)^6}{8}}$; e) $\sqrt[4]{\left(\frac{16}{0,0625}\right)^{-1}}$;

f) $\sqrt[8]{\frac{(-36)^4}{256}}$; g) $\sqrt[3]{125}-\sqrt{(-9)^2}$; h) $5\sqrt[3]{(-2)^3}-\sqrt[4]{(-2)^4}$;

i) $\sqrt[3]{(-3)^4\sqrt[4]{9^2\sqrt{(-3)^8}}}$; j) $\sqrt{\frac{(-5)^2\sqrt{(-2)^4}}{(-4)^2}}$; k) $\frac{3}{4}\cdot\sqrt[4]{\frac{(-2)^8|\sqrt[3]{-8}|}{(-3)^4}}\cdot\sqrt[4]{2^3}$.

45. Palyginkite skaičius:

a) $\sqrt[3]{3}$ ir $\sqrt[6]{5}$;   b) $\sqrt[4]{8}$ ir $\sqrt{3}$;   c) $\sqrt[3]{5}$ ir $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$;

d) $\sqrt{2}$ ir $\sqrt[6]{7}$;   e) $\sqrt[3]{7}$ ir $\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$;   f) $\sqrt[5]{5}$ ir $\sqrt[6]{6\sqrt[5]{3}}$.

46. Ar teisinga lygybė:

a) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$;   b) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$?

47. Suprastinkite:

a) $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}+\sqrt[4]{4}$;   b) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}-\sqrt[6]{27}$;

c) $\sqrt{12}+\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$;   d) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$;

e) $\frac{\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}{\sqrt{0,5}}$;   f) $\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\frac{\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2}$.

48. Įrodykite, kad teisinga lygybė:

a) $\sqrt{57+40\sqrt{2}}-\sqrt{57-40\sqrt{2}}=10$;

b) $\sqrt{|12\sqrt{5}-29|}-\sqrt{|12\sqrt{5}+29|}=-6$.

2.3. Laipsniai su racionaliaisiais rodikliais

Panagrinėkime kelis paprastus šaknies traukimo pavyzdžius:

$$\sqrt{3^4} = \sqrt{(3^2)^2} = 3^2 = 3^{\frac{4}{2}}, \quad \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2 = 2^{\frac{6}{3}}.$$

Taigi

$$\sqrt{3^4} = 3^{\frac{4}{2}}, \quad \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}}.$$

Apskritai prastinant reiškinį $\sqrt[n]{a^m}$ ($m \in \boldsymbol{N}$, $a > 0$), kai m dalijasi iš n (t. y. $m = nk$, $k \in \boldsymbol{N}$), atsakymą galima parašyti iš karto:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Iš tikrųjų šią lygybę nesunku įrodyti:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{nk}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k = a^{\frac{m}{n}}.$$

Atkreipkime dėmesį, kad lygybės $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ kairioji pusė yra apibrėžta ir tuomet, kai m nesidalija iš n — pagal šaknies apibrėžimą tai yra teigiamas skaičius, kurį pakėlę n-tuoju laipsniu gausime a^m. Šį skaičių pavadinsime a laipsniu rodikliu $\frac{m}{n}$.

APIBRĖŽIMAS
Teigiamo skaičiaus a laipsnis su racionaliuoju rodikliu $\frac{m}{n}$ ($m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$) *apibrėžiamas lygybe:* $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. *Skaičius a vadinamas laipsnio pagrindu, o* $\frac{m}{n}$ — *rodikliu.*

Laipsniai su racionaliaisiais rodikliais turi panašias savybes kaip ir laipsniai su sveikaisiais rodikliais. Tarkime, kad r ir s — racionalieji skaičiai, a ir b — bet kurie teigiamieji skaičiai. Tuomet:

1) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$;

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$;

3) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$;

4) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;

5) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

Įrodant šias savybes remiamasi laipsnio su racionaliuoju rodikliu apibrėžimu, šaknų bei laipsnių su sveikaisiais rodikliais savybėmis.

Įrodykime, pavyzdžiui, 1 savybę. Tegu $r = \frac{m}{n}$. Tada

$$(a \cdot b)^r = (a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a \cdot b)^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = \\ = a^r \cdot b^r.$$

Įrodykime 4 savybę, kai $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$. Samprotaukime taip:

$$a^r \cdot a^s = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[n \cdot q]{a^{m \cdot q}} \cdot \sqrt[n \cdot q]{a^{n \cdot p}} = \\ = \sqrt[n \cdot q]{a^{m \cdot q} \cdot a^{n \cdot p}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = \\ = a^{r+s}.$$

Užduotis. Įrodykite laipsnių su racionaliaisiais rodikliais 2, 3 ir 5 savybes.

Dažnai skaičiuoti būna patogiau, kai šaknis pakeičiama laipsniu su racionaliuoju rodikliu.

1 PAVYZDYS. Suprastinkime skaitinį reiškinį $\sqrt[4]{32 \cdot \sqrt[3]{4}}$.
Šį pavyzdį jau nagrinėjome 2.2 skyrelyje. Tačiau dabar pertvarkymus atlikime naudodamiesi laipsnių su racionaliaisiais rodikliais savybėmis:

$$\sqrt[4]{32 \cdot \sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{2^5 \cdot 2^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[4]{2^{5+\frac{2}{3}}} = \sqrt[4]{2^{\frac{17}{3}}} = 2^{\frac{17}{12}} = \\ = 2^{1+\frac{5}{12}} = 2 \cdot 2^{\frac{5}{12}} = 2\sqrt[12]{2^5} = 2\sqrt[12]{32}.$$

Tegu a, b yra teigiami skaičiai, $a > b$. Palyginkime laipsnius, kurių pagrindai yra šie skaičiai, o rodikliai — vienodi teigiamieji racionalieji skaičiai. Kadangi mažesniųjų teigiamų skaičių sandauga yra mažesnė už didesniųjų skaičių sandaugą, tai $a \cdot a > b \cdot b$, t. y. $a^2 > b^2$. Pasirėmę ta pačia savybe gauname, kad $a^3 > b^3$, $a^4 > b^4$ ir t. t.

Apskritai jei $a > b$ yra du teigiami skaičiai, tai su bet kokiu teigiamuoju racionaliuoju r teisinga nelygybė $a^r > b^r$. Šia savybe naudojamės lygindami laipsnius.

2 PAVYZDYS. Nustatykime, kuris skaičius didesnis: $2^{\frac{1}{2}}$ ar $3^{\frac{1}{3}}$.
Pakelkime abu skaičius laipsniu su tokiu teigiamu rodikliu, kad gautume natūraliuosius skaičius. Mažiausias toks rodiklis lygus 6:

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^3 = 8, \quad \text{taigi} \quad 2^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{6}};$$

$$\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 3^2 = 9, \quad \text{taigi} \quad 3^{\frac{1}{3}} = 9^{\frac{1}{6}}.$$

Kadangi $9 > 8$, tai $9^{\frac{1}{6}} > 8^{\frac{1}{6}}$, t. y. $3^{\frac{1}{3}} > 2^{\frac{1}{2}}$.

Kodėl neapibrėžiame laipsnių su racionaliuoju rodikliu ir *neigiamais* pagrindais? Viena vertus, reiškinys $\sqrt[n]{a^m}$, kai $a < 0$, ne su visais $n \in \boldsymbol{N}$, $m \in \boldsymbol{Z}$ turi prasmę. Pavyzdžiui, $\sqrt{(-2)^3}$ neturi prasmės, todėl ir $(-2)^{\frac{3}{2}}$ negalime apibrėžti. Tačiau ir tuo atveju, kai reiškinys $\sqrt[n]{a^m}$ $(a < 0)$ turi prasmę, apibrėžę $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ neišvengtume prieštaravimų. Iš tikrųjų, iš akivaizdžių lygybių $\sqrt[3]{(-8)^1} = -2$, $\sqrt[6]{(-8)^2} = 2$ gautume $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$, $(-8)^{\frac{2}{6}} = 2$. O juk pagrindai ir laipsnio rodikliai — tie patys!

Pratimai ir uždaviniai

49. Laipsnį su racionaliuoju rodikliu išreikškite šaknimi:

a) $2^{\frac{2}{3}}$; b) $12^{-\frac{1}{2}}$; c) $3^{0,75}$; d) $6^{1,5}$; e) $7^{-\frac{5}{4}}$; f) $3^{\frac{7}{3}}$.

50. Reiškinį užrašykite laipsniu su racionaliuoju rodikliu:

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$; b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}$; c) $\sqrt[3]{5\sqrt[4]{5}}$; d) $\frac{1}{\sqrt[5]{4\sqrt{8}}}$; e) $\sqrt{3\sqrt[3]{9\sqrt[4]{27}}}$; f) $\sqrt{\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[3]{8\sqrt{2}}}}$.

51. Apskaičiuokite:

a) $625^{\frac{3}{4}}$; b) $1000^{\frac{2}{3}}$; c) $8^{\frac{7}{3}}$; d) $64^{\frac{5}{6}}$; e) $64^{-\frac{2}{3}}$; f) $729^{-\frac{5}{6}}$.

52. Tegu a yra teigiamas skaičius. Suprastinkite:

a) $a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{2}}$; b) $a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{-\frac{1}{8}}$; c) $a^{\frac{3}{4}}:a^{\frac{2}{3}}$; d) $a^{\frac{1}{2}}:a^{-\frac{2}{5}}$.

53. Apskaičiuokite:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+(0,2)^{-4}\cdot 25^{-2}+64^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$;

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-17}\cdot 25^{-9}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\cdot 16^{-1,5}+81^{\frac{1}{4}}+2^{0}$;

c) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-6}-(4,8)^{0}\cdot 9^{\frac{1}{2}}-(-2)^{-2}$;

d) $(0,125)^{-\frac{1}{3}}+(0,81)^{\frac{1}{2}}+(0,027)^{\frac{2}{3}}$;

e) $(0,008)^{-\frac{2}{3}}+(0,064)^{-\frac{1}{3}}-(0,0625)^{-\frac{1}{4}}$.

54. Apskaičiuokite:

a) $\left((3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{0,5^{-1}}\right)\cdot\left((3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{0,5^{-1}}\right)$;

b) $\left(9^{-0,25}+(2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(9^{-\frac{1}{4}}-(2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}\right)$;

c) $\frac{1-2^{-\frac{1}{2}}}{1+2^{\frac{1}{2}}}-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)$;

d) $\left(\frac{1}{2+2\sqrt{3}}+\frac{1}{2-2\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{3+3\sqrt{2}}+\frac{1}{3-3\sqrt{2}}\right)$.

55. Apskaičiuokite:

a) $\frac{49^{\frac{1}{6}}\cdot 7^{2,5}}{49\cdot 7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{-\frac{2}{3}}}$; b) $\frac{4^{3}\cdot 2^{\frac{6}{5}}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2}}{16\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdot 8^{\frac{1}{40}}}$; c) $\frac{9^{\frac{1}{6}}\cdot 27^{-\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}\cdot 9^{0,75}}$;

d) $\frac{(2^{-2}+2^{0})\cdot 4}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-5\cdot(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}$; e) $\frac{125^{\frac{2}{3}}+16^{\frac{1}{2}}+243^{\frac{1}{5}}}{\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(0,5)^{-2}}$;

f) $\left(5^{\frac{1}{4}}+1\right)\cdot\left(5^{\frac{3}{4}}+5^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}\cdot\frac{5-\sqrt[4]{5}}{\sqrt{5}-1}$.

56. Kuris iš dviejų skaičių yra didesnis:

a) $(2,2)^{\frac{2}{5}}$ ar $(1,7)^{\frac{3}{5}}$; b) $3^{\frac{6}{7}}$ ar $(3,7)^{\frac{5}{7}}$; c) $2^{\frac{5}{6}}$ ar $(2,4)^{\frac{2}{3}}$;

d) $2^{\frac{1}{3}}$ ar $3^{\frac{1}{5}}$; e) $7^{\frac{1}{2}}$ ar $\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$; f) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ ar $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; g) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$ ar $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$?

3. Algebriniai reiškiniai

3.1. Reiškinių įvairovė

Dažnai sprendžiant uždavinius iš pradžių patogu gauti atsakymą raidine išraiška. Daugelis matematikos, fizikos, chemijos, ekonomikos ir kitų mokslų formulių — tokių išraiškų pavyzdžiai. Įstatę vietoj raidžių (kintamųjų) jų reikšmes apskaičiuojame skaitinę atsakymo reikšmę.

1 PAVYZDYS. Trapecijos plotą S skaičiuojame taip:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Formulėje raidės a, b žymi trapecijos pagrindų ilgius, o h — aukštinės ilgį. Pavyzdžiui, kai $a = 2\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $h = 3\,\text{cm}$, tai $S = \frac{2+5}{2} \cdot 3 = 10{,}5\,(\text{cm}^2)$.

2 PAVYZDYS. Kai elektros grandinėje yra du lygiagrečiai sujungti laidininkai, kurių varžos yra R_1 ir R_2 omų (Ω), tos grandinės pilnutinę varžą R galima apskaičiuoti pagal formulę

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Jei $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 3\,\Omega$, tai įrašę į formulę šias reikšmes apskaičiuojame R:

$$R = \frac{2 \cdot 3}{2+3} = \frac{6}{5} = 1{,}2\,(\Omega).$$

Abiejuose pavyzdžiuose formulių dešinėse pusėse užrašyti reiškiniai sudaryti iš skaičių ir kintamųjų naudojant tik sudėties, daugybos ir dalybos veiksmus. Dažnai sudarant reiškinius prisireikia ir kėlimo laipsniu bei šaknies traukimo veiksmų.

Reiškinius, sudarytus iš skaičių ir kintamųjų naudojant sudėties, atimties, daugybos, dalybos veiksmus, šaknis ir laipsnius su racionaliaisiais rodikliais, vadinsime *algebriniais reiškiniais*. Tokių reiškinių pavyzdžiai:

$$\frac{x^2+2x}{x-1}, \quad \sqrt{x-2}, \quad \frac{a+b+c}{3}, \quad \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}, \quad x^{\frac{3}{2}}y - 3x^{-\frac{2}{5}}\sqrt{y}.$$

Jeigu algebrinis reiškinys gautas sprendžiant kokį nors uždavinį, tai pati uždavinio sąlyga nusako, su kokiomis kintamųjų reikšmėmis tą reiškinį galima nagrinėti. Pavyzdžiui, trapecijos ploto formulėje a, b, h gali būti tik teigiami skaičiai.

Jei reiškinys nėra susijęs su konkrečiu uždaviniu, tai jo apibrėžimo sritimi laikysime visas tas kintamųjų reikšmes, kurias įstačius į reiškinį visi reiškinio veiksmai bus apibrėžti (turės prasmę).

3 PAVYZDYS.

a) Reiškinys $(a+b)^2$ yra apibrėžtas su visomis skaičių poromis $a, b \in \boldsymbol{R}$.

b) Reiškinys $\frac{1}{x-y}$ apibrėžtas su poromis $x, y \in \boldsymbol{R}$, $x \neq y$.

c) Reiškinys $\sqrt{x-2}$ apibrėžtas, kai $x-2 \geqslant 0$, t. y. $x \geqslant 2$.

d) Reiškinio $x^2 y^{\frac{2}{3}}$ apibrėžimo sritį sudaro visos skaičių poros $(x; y)$, $x \in \boldsymbol{R}$, $y > 0$ (laipsnius su racionaliaisiais rodikliais apibrėžėme tik teigiamiems pagrindams).

Algebrinių reiškinių yra pačių įvairiausių. Visų pirma, jie gali skirtis kintamųjų skaičiumi, pavyzdžiui: $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\cdot x$, $\sqrt{2}\cdot x\cdot y$.

Jei su kintamaisiais atliekami tik sudėties, atimties ir daugybos veiksmai (kėlimas natūraliuoju laipsniu irgi yra daugyba), o dalybos nėra iš viso arba dalijama tik iš skaičių, tai toks reiškinys vadinamas *sveikuoju*. Pavyzdžiui, sveikieji yra reiškiniai:

$$2x^2 + x, \quad \frac{3x^2}{2} + yz, \quad u^5 + \sqrt{3}u^3v^2.$$

Jeigu algebriniame reiškinyje panaudoti tik sudėties, atimties, daugybos ir dalybos veiksmai ir nors kartą dalijama iš reiškinio su kintamuoju, tai reiškinys vadinamas *trupmeniniu*. Pavyzdžiui, trupmeniniai yra šie reiškiniai:

$$\frac{abc}{a^2+b^2-c^2} + \frac{2}{a-b}, \quad \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}, \quad \frac{abc}{4R}, \quad \frac{x^3-3x+2}{2x^4+5x^2-3}.$$

Sveikieji ir trupmeniniai reiškiniai vadinami *racionaliaisiais*. Jeigu algebriniame reiškinyje yra traukiamos šaknys iš kintamųjų (ar iš reiškinių su kintamaisiais) arba jie keliami laipsniais su racionaliaisiais rodikliais, tai reiškinys vadinamas *iracionaliuoju*. Pavyzdžiui, iracionalieji yra reiškiniai:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \frac{x^3}{\sqrt{x+2}}, \quad \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad (x+2)^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{x-2} - 3x.$$

Užduotis. Nustatykite, kurie iš šių reiškinių sveikieji, kurie trupmeniniai ir kurie iracionalieji:

$$\frac{3x^2+x+5}{2{,}5}; \quad \frac{x^2+2x}{(x+2)(x-1)}; \quad \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{7}x^2 - 1; \quad \frac{2(x^3-5x+6)}{(x-2)(x-3)};$$

$$1 - \sqrt{2}x^2 + \sqrt[3]{3}x^3; \quad \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{x}}; \quad x + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} - \frac{1}{x}.$$

3.2. Reiškinių pertvarkymas

Kai reiškinys yra sudėtingas, paprastai siekiame jį suprastinti, t. y. pakeisti paprastesniu.

APIBRĖŽIMAS

Du reiškiniai vadinami tapačiais tam tikroje kintamųjų reikšmių aibėje, jei su visomis kintamųjų reikšmėmis iš šios aibės reiškinių skaitinės reikšmės yra lygios.

Pavyzdžiui, reiškiniai $\frac{x-1}{x(x-1)}$ ir $\frac{1}{x}$ yra tapatūs, kai $x \neq 0$, $x \neq 1$; reiškiniai $\sqrt{(x-2)^2}$ ir $|x-2|$ yra tapatūs su visais x.

Rašome: $\frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0,\ x \neq 1)$; $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ $(x \in \boldsymbol{R})$.

Kai yra akivaizdu, kokioje kintamųjų reikšmių aibėje reiškiniai yra tapatūs, jos galime nenurodyti.

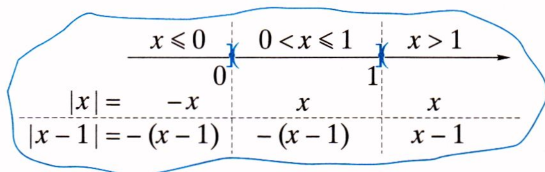
Pertvarkyti reiškinį — reiškia jį pakeisti jam tapačiu reiškiniu. Jei gautasis reiškinys yra paprastesnis už pradinį, sakome, kad reiškinį suprastinome.

Kartais patogu reiškinio apibrėžimo sritį suskaidyti į kelias dalis ir kiekvienoje iš jų reiškinį pertvarkyti atskirai.

1 PAVYZDYS. Panagrinėkime reiškinį $|x| + |x-1|$. Jis apibrėžtas su visais realiaisiais skaičiais x. Suskaidykime apibrėžimo sritį į kelias dalis ir kiekvienoje jų pertvarkykime reiškinį taip, kad nebeliktų modulio ženklo.

Kai $x \leqslant 0$, tai $|x| = -x$, kai $x > 0$, tai $|x| = x$. Analogiškai kai $x \leqslant 1$, tai $|x-1| = -(x-1)$, kai $x > 1$, tai $|x-1| = x-1$.

Taigi geriausia apibrėžimo sritį skaidyti į dalis, kaip parodyta brėžinyje.



Todėl kai $x \leqslant 0$, tai

$$|x| + |x-1| = -x - (x-1) = -2x + 1.$$

Kai $0 < x \leqslant 1$, tai tą patį reiškinį galime pertvarkyti taip:

$$|x| + |x-1| = x - (x-1) = 1.$$

Kai $x > 1$, tai

$$|x| + |x-1| = x + (x-1) = 2x - 1.$$

Taigi skirtingose reiškinio apibrėžimo srities dalyse tas pats reiškinys gali būti pertvarkomas skirtingai.

1 užduotis. Panašiai kaip 1 pavyzdyje pertvarkykite reiškinį $|x| + |x-1| + |x-2|$.

Kai reiškinį pertvarkome visoje jo apibrėžimo srityje, tai paprastai nenurodome, kokias reikšmes gali įgyti kintamieji.

Pertvarkydami reiškinius atliekame aritmetinius veiksmus, naudojamės šaknų ir laipsnių savybėmis, taip pat ir žinomomis tapatybėmis. Prisiminkime keletą žinomų formulių.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

Užrašykime keletą panašių tapatybių su trečiaisiais laipsniais.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3,$$
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Šios formulės dažnai vadinamos greitosios daugybos formulėmis. Jos teisingos su visais realiaisiais skaičiais a ir b.

2 užduotis. Įrodykite greitosios daugybos formules.

Panagrinėkime keletą reiškinių pertvarkymo pavyzdžių. Kadangi reiškinius pertvarkysime visose jų apibrėžimo srityse, tai šių sričių nenurodysime.

2 PAVYZDYS.

$$\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a+b)} =$$
$$= \frac{a^2-ab+b^2}{a-b}.$$

3 PAVYZDYS.

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} =$$
$$= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} =$$
$$= \sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x} =$$
$$= \sqrt{y}.$$

4 PAVYZDYS.

$$\left(\frac{\left(a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\frac{2\cdot\sqrt{2{,}5}\cdot(a+b)^{-1}}{(10)^{-\frac{1}{2}}}=$$

$$=\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\frac{2\cdot\sqrt{2{,}5}\cdot\sqrt{10}}{a+b}=$$

$$=\left(\frac{(a^{\frac{1}{2}})^3-(b^{\frac{1}{2}})^3}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\frac{\sqrt{4\cdot 2{,}5\cdot 10}}{a+b}=$$

$$=(a+\sqrt{ab}+b-\sqrt{ab})\cdot\frac{10}{a+b}=10.$$

5 PAVYZDYS. Apskaičiuokime reiškinio

$$A(x)=\frac{1-x}{1-x^{0{,}5}}\cdot\left(\frac{1+x^{1{,}5}}{1-\sqrt{x}+x}-x^{0{,}5}\right)$$

reikšmę, kai $x=\frac{1}{4}$.

Iš pradžių reiškinį suprastinsime, o po to įrašysime $x=\frac{1}{4}$. Pertvarkę gausime:

$$A(x)=\frac{1-(\sqrt{x})^2}{1-\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{1+(\sqrt{x})^3}{1-\sqrt{x}+x}-\sqrt{x}\right)=$$

$$=\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)}{1-\sqrt{x}+x}-\sqrt{x}\right)=$$

$$=(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{x}-\sqrt{x})=$$

$$=1+\sqrt{x}.$$

Kai $x=\frac{1}{4}$, tai: $A\left(\frac{1}{4}\right)=1+\sqrt{\frac{1}{4}}=1{,}5.$



Matematikos knyga ar vadovėlis be formulių ir reiškinių? Tikriausiai tokių nebūna. Tačiau iki pat XVI amžiaus matematiniai veikalai iš tikrųjų atrodė tarsi kokie romanai — beveik be žymėjimų ir formulių. Prancūzų matematikas Fransua Vijetas (1540–1603) buvo pirmasis, gerai supratęs žymėjimų naudą ir pradėjęs žymėti įvairius dydžius raidėmis. Tada ir pasipylė matematiniai reiškiniai bei formulės. Beje, Prancūzijos karaliai F. Vijetą labai vertino kaip neprilygstamą slaptų pranešimų šifravimo ir dešifravimo meistrą!

Pratimai ir uždaviniai

57. 1) Koks algebrinis reiškinys temperatūrą, užrašytą Celsijaus laipsniais, išreiškia Farenheito laipsniais f, jeigu Celsijaus laipsnius c reikia padvigubinti, po to gautąjį skaičių sumažinti 10% ir prie gautojo rezultato pridėti 32?

2) Koks algebrinis reiškinys temperatūrą, užrašytą Reomiūro laipsniais, išreiškia Farenheito laipsniais f, jeigu Reomiūro laipsnius r reikia padvigubinti, po to gautąjį skaičių padidinti 12,5% ir prie gautojo rezultato pridėti 32?

3) Koks algebrinis reiškinys temperatūrą Celsijaus laipsniais c išreiškia Reomiūro laipsniais r?

58. Nustatykite algebrinio reiškinio apibrėžimo sritį ir suprastinkite jį:

a) $\frac{2x-1}{x-1} - \frac{1}{1+x}$; b) $\frac{x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$; c) $\frac{3+x}{3-x} + \frac{x-3}{x+3}$; d) $\frac{7x-2x^2-3}{2x^2-x}$;

e) $\frac{2+x-3x^2}{9x^2-4}$; f) $\frac{4x^2-5x+1}{4x-1} - \frac{x^2-1}{1-x}$; g) $\frac{9a^2-4}{2-3a} - \frac{6a^2-5a-6}{3-2a}$.

Nurodymas. Prastinant reiškinius dažnai tenka skaidyti reiškinius dauginamaisiais. Kartais tai padaryti pavyksta pasinaudojus greitosios daugybos formulėmis, kartais — atitinkamai sugrupavus dėmenis. Dažnai pravartu kvadratinį trinarį $ax^2 + bx + c$ išskaidyti dauginamaisiais.
Jei x_1, x_2 yra lygties $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ sprendiniai, tai
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Kai $x_1 = x_2$, tai $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.
Jei lygtis $ax^2 + bx + c = 0$ sprendinių neturi, tai kvadratinio trinario dauginamaisiais išskaidyti negalima.

---

59. Suprastinkite reiškinį:

a) $\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{2b(3a^2+b^2)} + 1$; b) $\frac{x^3+4x^2-9x-36}{x^2+x-12}$;

c) $\frac{12m}{2m+1} + \frac{2m^2-m}{m-1}\left(\frac{6}{2m^2+m} - \frac{6}{4m^2-1}\right)$; d) $\frac{2+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-2}$.

60. Pertvarkę reiškinį apskaičiuokite jo reikšmę, kai duotos kintamųjų reikšmės:

a) $\frac{3a^2b+2ab^2-1}{2a-b}$, $a = -\frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{2}$;

b) $\frac{2ab^2-3a^2b+1}{3a-b}$, $a = -0{,}5$, $b = \frac{2}{3}$;

c) $\frac{10\sqrt{m}}{n-m} + \frac{5}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}$, $n = \frac{4}{9}$, $m = \frac{16}{81}$;

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$, $x = \frac{a^2+b^2}{2ab}$ $(b > a > 0)$;

e) $\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)$, $x = 4\frac{5}{7}$, $y = 5\frac{2}{7}$;

f) $\frac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}$, $a = 5 - \sqrt{21}$, $b = 5 + \sqrt{21}$.

61. Įrodykite tapatybę:

a) $\left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{2-x}{2+x}\right) : \frac{8}{2+x} = \frac{x}{2-x}$;

b) $\left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a}\right) : \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}\right) = 2a - 1$;

c) $\left(\frac{2x+1}{x+2} - \frac{4x+2}{4-x^2}\right) : \frac{2x+1}{x-2} = 1 - \frac{2}{x+2}$;

d) $a^3 + b^3 - (a+b)^3 = -3ab(a+b)$;

e) $\frac{(1+\sqrt{x})(x\sqrt{x}-1)}{1+x+\sqrt{x}} = x - 1$;

f) $\left(\frac{\sqrt{a}+2}{a+2\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{2}{a-1}$;

g) $\left(2 - \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$;

h) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) : \frac{a}{a-b} = 1 + \frac{b}{a}$;

i) $\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} - \frac{a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}} = -\sqrt[3]{ab}$;

j) $\frac{2a^{-2}-\frac{1}{2}a^{-3}}{a^{-2,5}-\frac{1}{2}a^{-3}} + \frac{a^{-\frac{1}{2}}-a^{-2}}{a^{-1}+a^{-1,5}+a^{-2}} = 3\sqrt{a}$.

62. Suskaidę apibrėžimo sritį į dalis, užrašykite reiškinį be modulio ženklo:

a) $\frac{|x|}{x}$; b) $|x+1| + |x|$; c) $\frac{2x+|x|}{x}$; d) $\frac{x+|x|}{2x}$;
e) $\frac{|\pi-x|}{|\pi+x|} + 1$; f) $\frac{x-3+|3-x|}{5|x-3|}$; g) $|x^2-4| - |9-x^2|$.

63. Taikydami formulę

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & \text{kai } n \text{ — nelyginis,} \\ |x|, & \text{kai } n \text{ — lyginis,} \end{cases}$$

suprastinkite reiškinius:

a) $\sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{(x-2)^2}$;

b) $\sqrt[4]{(2x-7)^4} - \sqrt{(5-x)^2}$;

c) $\sqrt[4]{(4-x)^4} + \sqrt[3]{(3-x)^3} + \sqrt{(2-x)^2} + 1 - x$;

d) $\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2}}$.

Suskaidę šių reiškinių apibrėžimo sritis į atitinkamas dalis parašykite reiškinius be modulio ženklų.

64. Su kuria p reikšme reiškinys

a) $x^2 + 2px + 1$; b) $x^2 + 2x + p$; c) $x^2 - 2x + p$;

d) $x^2 + px + 1$; e) $3x^2 + px + \frac{3}{4}$; f) $-px^2 + (p-2)x + 1$

yra lygus dvinario kvadratui?

4. Lygtys, nelygybės ir jų sistemos

4.1. Lygtys ir jų sprendiniai

Dažnai sprendžiant įvairius uždavinius tenka ieškoti tų kintamųjų reikšmių, su kuriomis du reiškiniai įgyja tas pačias reikšmes. Sulyginę tuos reiškinius sudarome lygtį; reiškinių kintamuosius vadiname lygties nežinomaisiais.

Panagrinėsime lygtis su vienu nežinomuoju. Jas galima užrašyti taip:

$$A(x) = B(x);$$

čia $A(x)$, $B(x)$ yra algebriniai reiškiniai su vienu kintamuoju x, kurį vadiname lygties nežinomuoju. Dažnai vienas iš reiškinių $A(x)$, $B(x)$ būna tiesiog skaičius.

Aibė tų lygties $A(x) = B(x)$ nežinomojo reikšmių, su kuriomis lygties reiškiniai $A(x)$, $B(x)$ yra apibrėžti, vadinama lygties apibrėžimo sritimi.
Nežinomojo reikšmės, kurias įstačius į lygtį gaunamos teisingos skaitinės lygybės, vadinamos lygties sprendiniais.
Išspręsti lygtį — reiškia rasti visus jos sprendinius (arba nustatyti, kad jų nėra).

PAVYZDŽIAI.

a) Lygties $\frac{x^2-1}{x-1} = 1$ apibrėžimo sritis — visi skaičiai, nelygūs 1, o sprendinys $x = 0$.

b) Lygties $\sqrt{|x|} = -1$ apibrėžimo sritis — visa realiųjų skaičių aibė, bet sprendinių ji neturi.

c) Lygties $\sqrt{x^2} = |x|$ apibrėžimo sritį ir sprendinių aibę sudaro visi realieji skaičiai.

Lygtys sprendžiamos įvairiai. Paprastai sudėtingos lygtys yra pertvarkomos į paprastesnes lygtis, turinčias tuos pačius sprendinius.

Jeigu dvi lygtys turi tuos pačius sprendinius (arba abi jų neturi), tai jos vadinamos ekvivalenčiomis.

Pertvarkydami lygtis, dažnai remiamės tokiais teiginiais:

1) jei prie abiejų lygties pusių pridėsime (arba iš abiejų pusių atimsime) po tą patį skaičių, tai gautoji lygtis bus ekvivalenti pradinei;
2) jei abi lygties puses padauginsime (arba padalysime) iš to paties nelygaus nuliui skaičiaus, tai gautoji lygtis bus ekvivalenti pradinei.

Pastebėkime, kad pridėdami prie abiejų lygties pusių ne skaičių, bet reiškinį su kintamuoju, kartais gauname neekvivalenčią lygtį. Iš tiesų, jei prie lygties

$$\frac{x^2-1}{x-1}=1,$$

turinčios vieną sprendinį $x=0$, abiejų pusių pridėsime po reiškinį $\frac{1}{x}$, tai gausime lygtį

$$\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x},$$

kuri sprendinių neturi. Taip atsitiko todėl, kad pridėdami $\frac{1}{x}$ susiaurinome pradinės lygties apibrėžimo sritį: naujoji lygtis neapibrėžta būtent su ta x reikšme, kuri yra pradinės lygties sprendinys. Panašiai gali atsitikti ir dauginant arba dalijant abi lygties puses iš reiškinio su kintamuoju. Pavyzdžiui, lygtis

$$\frac{x^2-1}{x-1}=1$$

turi vieną sprendinį $x=0$, o padauginę abi puses iš $x-1$ gausime lygtį

$$x^2-1=x-1,$$

turinčią du sprendinius.

Lygtis $2x^2=x$ turi du sprendinius: $x_1=0$ ir $x_2=\frac{1}{2}$, tačiau padaliję abi puses iš x gautume lygtį $2x=1$, turinčią tik vieną sprendinį.


Nesinaudokime tokiais pertvarkiais, kurie pradangina sprendinius!

4.2. Racionaliosios lygtys

Kai lygtis sudaryta iš racionaliųjų reiškinių, ji vadinama racionaliąja. Pavyzdžiui, racionaliosios yra lygtys:

$$x^2+2x+1=0,\qquad \frac{x^3+1}{x+1}=1.$$

Kairėje pirmosios lygties pusėje užrašytas sveikasis reiškinys, antrosios — trupmeninis reiškinys.

Tiesinės ir kvadratinės lygtys yra paprasčiausios racionaliosios lygtys.

1 užduotis. Pasakykite, kiek sprendinių turi lygtys: $2\cdot x=1,\ 0\cdot x=1,\ 0\cdot x=0.$

Tiesinės lygties $ax=b$ sprendiniai:
- *kai $a\neq 0$, sprendinys yra vienintelis, $x=\frac{b}{a}$;*
- *kai $a=0$, $b\neq 0$, sprendinių nėra;*
- *kai $a=0$, $b=0$, — visi realieji skaičiai yra sprendiniai.*

Prisiminkime, kaip randame kvadratinės lygties sprendinius.

Kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ *sprendiniai:*

- *kai* $D = b^2 - 4ac > 0$, *lygtis turi du skirtingus sprendinius* $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$;
- *kai* $D = 0$, *lygtis turi vienintelį sprendinį:* $x_1 = -\frac{b}{2a}$;
- *kai* $D < 0$, *lygtis sprendinių neturi.*

Reiškinys D *vadinamas kvadratinės lygties diskriminantu.*

Padaliję abi kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ puses iš a $(a \neq 0)$ ir pažymėję koeficientą prie x raide p, o laisvąjį narį q gausime ekvivalenčią lygtį

$$x^2 + px + q = 0.$$

Tokiai lygčiai teisinga *Vijeto teorema.*

VIJETO TEOREMA

Jeigu x_1 *ir* x_2 *yra lygties* $x^2 + px + q = 0$ *sprendiniai (kai lygtis turi tik vieną sprendinį, reikia imti* $x_1 = x_2$*), tai teisingos lygybės:*

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Teisingas ir teiginys, atvirkštinis Vijeto teoremai: jei x_1 ir x_2 yra du skaičiai,

$$p = -(x_1 + x_2), \quad q = x_1 \cdot x_2,$$

tai x_1 ir x_2 yra lygties $x^2 + px + q = 0$ sprendiniai.

Juo pasinaudojus galima greitai sudaryti kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai yra du duotieji skaičiai. Pavyzdžiui, jei $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, tai atitinkama kvadratinė lygtis yra $x^2 - 8x + 15 = 0$. Žinoma, tą pačią lygtį galime sudaryti ir be Vijeto teoremos:

$$(x - 3)(x - 5) = 0, \quad x^2 - 8x + 15 = 0.$$

Bet kurią racionaliąją lygtį, į kurią įeina trupmeniniai reiškiniai, galime pertvarkyti į ekvivalenčią jai lygtį

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0,$$

kur $A(x)$, $B(x)$ yra sveikieji reiškiniai. Gautąją lygtį sprendžiame taip: surandame visas nežinomojo reikšmes, su kuriomis $A(x) = 0$, ir atmetame tas iš jų, su kuriomis vardiklis $B(x)$ lygus nuliui. Likusios nežinomojo reikšmės bus pradinės racionaliosios lygties sprendiniai. Kitaip tariant — pradinę lygtį keičiame sistema

$$\begin{cases} A(x) = 0, \\ B(x) \neq 0. \end{cases}$$

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį

$$\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{x(2-x)}.$$

Perkėlę visus narius į vieną pusę ir subendravardiklinę gausime:

$$\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}-\frac{4}{x(2-x)}=0, \qquad \frac{4x+x(2-x)-8}{2x(2-x)}=0, \qquad \frac{-x^2+6x-8}{2x(2-x)}=0.$$

Lygtis $-x^2+6x-8=0$ turi du sprendinius: $x_1=2$ ir $x_2=4$. Tačiau $x=2$ paverčia lygties vardiklį nuliu. Taigi $x=4$ yra vienintelis mūsų racionaliosios lygties sprendinys.

Šią lygtį galėjome spręsti ir kiek kitaip. Pareikalavę, kad būtų $x(2-x)\neq 0$, dauginame abi lygties puses iš šio reiškinio ir sudarome sistemą

$$\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}x(2-x)=4, \\ x(2-x)\neq 0. \end{cases}$$

Išsprendę ją gautume tą patį sprendinį $x=4$.

2 užduotis. Išspręskite lygtį

$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{3-3x}=\frac{x}{x+1}.$$

Kartais tenka spręsti lygtis, į kurių reiškinius įeina ne tik nežinomasis ir skaičiai, bet ir kiti *raidėmis* pažymėti dydžiai, galintys įgyti įvairias reikšmes. Šiuos dydžius vadiname lygties *parametrais*. Įstatę skaitines parametrų reikšmes gauname lygtį, į kurią įeina tik nežinomasis ir skaičiai.

Jeigu į lygtį įeina tik vienas parametras, tai išspręsti ją reiškia kiekvienai parametro reikšmei surasti lygties sprendinius.

2 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $(a-1)x^2+2x-1=0$. Dydis a yra šios lygties parametras.

Kai $a=1$, lygtis tampa tiesine ir turi vieną sprendinį: $2x-1=0$, $x=\frac{1}{2}$.

Kai $a\neq 1$, lygtis bus kvadratinė, kurios $D=2^2-4(a-1)(-1)=4a$. Kvadratinės lygties sprendinių skaičius priklauso nuo diskriminanto ženklo.

Kai $a=0$, tai $D=0$ ir lygtis turi vieną sprendinį $x=1$.

Kai $a<0$, tai $D<0$ ir lygtis sprendinių neturi.

Kai $a>0$, $a\neq 1$, tai $D>0$ ir lygtis turi du sprendinius $x_1=\frac{-1+\sqrt{a}}{a-1}$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{a}}{a-1}$.

Taigi išsprendėme lygtį su parametru: kiekvienai parametro reikšmei nurodėme, kokie yra lygties sprendiniai.

Pratimai ir uždaviniai

65. Nustatykite lygties apibrėžimo sritį:

a) $\frac{4}{x+3} + \frac{7}{x+2} = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$;

b) $\frac{1}{2x+5} - \frac{9}{10-x-2x^2} = \frac{4}{x^2-4}$;

c) $\frac{1}{x^2+1} = x^2 - 1$;

d) $\frac{1}{|x+5|} + \frac{1}{x^2-25} = \frac{4}{x^2-10x+25}$;

e) $\frac{2x}{x^2+x+1} - \frac{x+1}{3x^2-2x+1} = 0$;

f) $\frac{x^2}{x} = x$.

66. Ar ekvivalenčios lygtys:

a) $7 - 2x + \frac{5}{x-2} = 11 - 4x + \frac{5}{x-2}$ ir $7 - 2x = 11 - 4x$;

b) $5 + 2x + \frac{5}{x-2} = 26 - x + \frac{5}{x-2}$ ir $5 + 2x = 26 - x$;

c) $\frac{x^2-1}{x-1} = 2$ ir $x + 1 = 2$;

d) $\frac{x^2-1}{x-1} = 3$ ir $x + 1 = 3$;

e) $\frac{2(x-10)}{x^2-13x+30} = 1$ ir $x^2 - 15x + 50 = 0$?

67. Išspręskite lygtį:

a) $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+2}$;

b) $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x-3}$;

c) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-5}{x-3} = 0$;

d) $\frac{x^2+17}{x^2-1} = \frac{x-2}{x+1} - \frac{5}{1-x}$;

e) $\frac{x^2-3}{1-x^2} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{x+1}$;

f) $\frac{3x-1}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x-1} + \frac{8}{1-4x^2}$.

68. Išspręskite lygtį su parametru:

a) $(p+1)x = p$;

b) $px = p^2 + p + 1$;

c) $(p^2 - 1)x = p + 1$;

d) $(p^2 - 5p + 6)x = p + 3$.

69. Su kuriomis k reikšmėmis lygtis

a) $(2 - x)(x - 2) = k$;

b) $3x^2 - 2kx - k + 6 = 0$;

c) $k^2x^2 + 4kx + 4 = 0$;

d) $x(x - 1) + |k - 1| = 0$

neturi sprendinių?

70. Su kuriomis p reikšmėmis lygtis

a) $(x + 1)(2 - x) = p$;

b) $x^2 - (p + 1)x + p = -4$;

c) $x^2 + (2 - p)x - p - 3 = 0$;

d) $(p - 1)x^2 + 2px + (p + 1) = 0$

turi vieną sprendinį?

71. Su kuriomis a reikšmėmis lygtis

a) $(a + 3)x^2 - 2(a + 6)x + a + 10 = 0$;

b) $(a - 3)x^2 + 2x + 3a = 11$;

c) $(a - 1)x^2 - 2(a + 1)x + a - 2 = 0$;

d) $x^2 + (|a - 1| - 1)x = 0$

turi du sprendinius?

4.3. Du lygčių sprendimo metodai

Skaidymas dauginamaisiais

Jeigu lygtį $A(x) = B(x)$ pavyksta pertvarkyti į ekvivalenčią jai lygtį $C(x)D(x) = 0$, tai visus pradinės lygties sprendinius gauname iš lygčių: $C(x) = 0$, $D(x) = 0$.

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį: a) $x^3 - 4x = 0$; b) $x^3 - 3x + 2 = 0$.
a) Išskaidę kairiąją lygties pusę dauginamaisiais gausime ekvivalenčią lygtį

$$x(x^2 - 4) = 0, \quad x(x + 2)(x - 2) = 0.$$

Taigi pradinės lygties sprendinius gauname iš lygčių $x = 0$, $x + 2 = 0$, $x - 2 = 0$, t. y. jos sprendiniai yra $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.
b) Kairiąją lygties pusę išskaidykime dauginamaisiais:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 = x^3 - 4x + x + 2 &= \\ = x(x^2 - 4) + x + 2 &= x(x - 2)(x + 2) + x + 2 = \\ = (x + 2)(x^2 - 2x + 1) &= (x + 2)(x - 1)^2. \end{aligned}$$

Taigi lygtis $x^3 - 3x + 2 = 0$ ekvivalenti lygčiai

$$(x + 2)(x - 1)^2 = 0.$$

Prilyginę nuliui dauginamuosius: $x+2 = 0$, $(x-1)^2 = 0$, gauname lygties sprendinius $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Nežinomojo keitimas

Kartais sudėtingą lygtį galima pakeisti paprastesne, pakeitus nežinomąjį.

2 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0$.
Pastebėkime, kad pirmajame ir antrajame nariuose pasikartoja reiškinys $x^2 - 3x$. Pažymėję $y = x^2 - 3x$ gausime $y^2 - 2y - 8 = 0$. Ši kvadratinė lygtis turi du sprendinius $y_1 = 4$, $y_2 = -2$. Taigi pradinės lygties sprendinius surasime spręsdami dvi kvadratines lygtis

$$x^2 - 3x = 4 \quad \text{ir} \quad x^2 - 3x = -2.$$

Pirmoji lygtis turi du sprendinius -1 ir 4, antroji — irgi du: 1 ir 2. Vadinasi, pradinė lygtis turi keturis sprendinius: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$.

Keičiant nežinomąjį patogu spręsti ketvirtojo laipsnio lygtis

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0),$$

kurios vadinamos *bikvadratinėmis*.

Iš tikrųjų, pažymėję $y = x^2$ gausime kvadratinę lygtį

$$ay^2 + by + c = 0.$$

3 PAVYZDYS. Išspręskime bikvadratinę lygtį

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$$

Pažymėję $x^2 = t$ gauname lygtį

$$t^2 - 8t - 9 = 0,$$

kurios sprendiniai yra $t_1 = 9$ ir $t_2 = -1$. Tuomet išsprendę lygtį $x^2 = 9$ gausime du pradinės lygties sprendinius $x_1 = 3$ ir $x_2 = -3$. Lygtis $x^2 = -1$ sprendinių neturi. Taigi duotoji bikvadratinė lygtis turi du sprendinius $x_1 = 3$ ir $x_2 = -3$.

4 PAVYZDYS. Išspręskime racionaliąją lygtį

$$\frac{x}{x+1} + \frac{2(x+1)}{x} = 3.$$

Lygties apibrėžimo sritį sudaro realieji skaičiai, išskyrus 0 ir -1. Pastebėkime, kad kairėje lygties pusėje yra du panašūs reiškiniai, tik trupmenų skaitikliai ir vardikliai sukeisti vietomis. Pakeiskime nežinomąjį pažymėdami

$$t = \frac{x}{x+1}.$$

Tada

$$\frac{x+1}{x} = \frac{1}{t},$$

todėl pradinė lygtis pakeičiama lygtimi su nauju nežinomuoju:

$$t + \frac{2}{t} = 3, \qquad \frac{t^2 - 3t + 2}{t} = 0.$$

Išsprendę lygtį $t^2 - 3t + 2 = 0$ gauname $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Pradinės lygties sprendinius rasime iš lygčių

$$\frac{x}{x+1} = 1, \qquad \frac{x}{x+1} = 2.$$

Išsprendžiame šias lygtis:

$$\frac{x}{x+1} - 1 = 0, \qquad \frac{-1}{x+1} = 0 \quad \text{(sprendinių nėra);}$$
$$\frac{x}{x+1} - 2 = 0, \qquad \frac{-x-2}{x+1} = 0, \qquad x = -2.$$

Vadinasi, lygties sprendinys yra -2.

Pratimai ir uždaviniai

72. Išspręskite racionaliąją lygtį:

a) $\frac{3x-5}{x-1} - \frac{2x-5}{x-2} = 1$;
b) $\frac{3x-2}{x+1} - \frac{x-2}{x-3} = 1$;
c) $\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x-3} = \frac{5}{(x+2)(x-3)}$;
d) $\frac{14}{3x-12} - \frac{2+x}{x-4} = \frac{3}{8-2x} - \frac{5}{6}$;
e) $\frac{2(x-1)}{x^2-36} - \frac{x-2}{x^2-6x} = \frac{x-1}{x^2+6x}$;
f) $\frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{1}{x^2-2x}$;
g) $\frac{(x+3)^2}{x+1} - \frac{(x+1)^2}{x+3} = 0$;
h) $\frac{x^3+64}{16+4x} + \frac{x}{4} = 11$.

73. Išspręskite lygtį atlikę nurodytą nežinomojo keitinį:

a) $\frac{x}{x-1} + \frac{6(x-1)}{x} - 5 = 0, \quad t = \frac{x}{x-1}$;
b) $\frac{x-2}{x+1} + \frac{4(x+1)}{x-2} = 5, \quad t = \frac{x-2}{x+1}$;
c) $\frac{2x+1}{x} + \frac{2x}{2x+1} - 3 = 0, \quad t = \frac{2x+1}{x}$.

74. Išspręskite lygtį pakeitę nežinomąjį:

a) $\frac{(x^2+1)^2+x^2}{x(x^2+1)} = 2{,}9$;
b) $\frac{(x^2-1)^2-2x^2}{x(x^2-1)} = 1$;
c) $\frac{3}{x^2+x+1} + x^2 + x = 3$.

75. Išspręskite lygtį:

a) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$;
b) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;
c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;
d) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$;
e) $(3x+2)^4 - 10(3x+2)^2 + 9 = 0$;
f) $(2x+3)^4 - 3(2x+3)^2 - 4 = 0$;
g) $36(x-1)^4 - 13(x-1)^2 + 1 = 0$;
h) $9(3x-5)^4 + 8(3x-5)^2 - 1 = 0$.

76. Su kuriomis p reikšmėmis yra lygūs reiškiniai:

a) $\frac{1}{p^2-5p+6} - \frac{6}{p^2-5p+8}$ ir $\frac{3}{5p-p^2-7}$;
b) p^2+9 ir $6p-2|p-3|$;
c) $|p|+|p-2|$ ir $|p-3|$?

77. Turistas automobiliu iš vieno miesto į kitą nuvažiavo per 3 dienas. Pirmąją dieną jis nuvažiavo $\frac{1}{5}$ viso kelio ir dar 60 km, antrąją — $\frac{1}{4}$ viso kelio ir dar 20 km, o trečiąją — $\frac{23}{80}$ viso kelio ir likusiuosius 25 km. Koks atstumas tarp miestų?

78. Jūros vanduo turi 8% druskos. Keliais kilogramais gėlo vandens reikia atskiesti 30 kg jūros vandens, kad jo druskos koncentracija būtų 5%?

4.4. Iracionaliosios lygtys

Jeigu lygtyje yra reiškinys su nežinomuoju po šaknies ženklu arba toks reiškinys keliamas racionaliuoju (nelygiu sveikajam skaičiui) laipsniu, tai lygtį vadiname *iracionaliąja*. Iracionaliųjų lygčių pavyzdžiai:

$$\sqrt{x-2} = 2x; \quad \sqrt[3]{x} + 2 = 0; \quad x^{\frac{1}{5}} = 1; \quad \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}} = x - 1.$$

Panagrinėkime iš pradžių lygtis su kvadratinėmis šaknimis. Kartais iš karto galima pasakyti, kad iracionalioji lygtis neturi sprendinių. Pavyzdžiui, lygtis $\sqrt{x+2} = -1$ neturi sprendinių, nes kvadratinės šaknies reikšmė negali būti neigiama.

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $\sqrt{x+2} = 1$.
Lygtį spręsime remdamiesi teiginiu: jeigu skaičiai yra lygūs, tai ir jų kvadratai yra lygūs. Taigi turi būti:

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = 1^2, \quad x + 2 = 1, \quad x = -1.$$

Gautąją x reikšmę įstatę į lygtį įsitikiname, kad rastoji reikšmė tikrai yra jos sprendinys: $\sqrt{-1+2} = 1$.

Keliant abi lygties puses kvadratu sprendžiamos ir kitos iracionaliosios lygtys su kvadratinėmis šaknimis. Tačiau dažnai šitaip gaunama lygtis yra neekvivalenti pradinei.

2 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $\sqrt{x-2} = \sqrt{1-x}$.
Pakėlę abi lygties puses kvadratu gausime:

$$x - 2 = 1 - x, \quad x = 1\frac{1}{2}.$$

Tačiau ši nežinomojo reikšmė nėra pradinės lygties sprendinys, nes su ja reiškinys $x-2$ yra neigiamas ir kvadratinė šaknis yra neapibrėžta. Taigi pradinė lygtis sprendinių neturi.

Šią lygtį galima spręsti ir kitaip. Pradėkime nuo apibrėžimo srities. Norėdami ją surasti turime nustatyti, su kokiomis x reikšmėmis teisingos nelygybės $x - 2 \geqslant 0$ ir $1 - x \geqslant 0$, t. y. $x \geqslant 2$, $x \leqslant 1$. Kadangi tokių reikšmių nėra, tai apibrėžimo sritis — tuščioji aibė, ir lygties sprendinių nėra.

3 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $2\sqrt{x+5} = x + 2$.
Pakėlę abi lygties puses kvadratu gauname:

$$4(x+5) = (x+2)^2, \quad 4x + 20 = x^2 + 4x + 4, \quad x^2 = 16.$$

Pastaroji lygtis turi du sprendinius $x_1 = 4$ ir $x_2 = -4$. Įstatę į pradinę lygtį $x = 4$ įsitikiname, kad skaičius 4 yra jos sprendinys. Tačiau įstatę į pradinę lygtį $x = -4$ gauname neteisingą lygybę: $2\sqrt{-4+5} = -4 + 2$, $2 = -2$. Taigi lygtis turi vieną sprendinį $x = 4$.

Kartais sprendžiant iracionaliąją lygtį su kvadratinėmis šaknimis vieną kartą pakelti abi lygties puses kvadratu nepakanka.

4 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $\sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{x+4}$.
Pakėlę abi lygties puses kvadratu ir pertvarkę reiškinius gauname:

$$3x + 1 = 1 + 2\sqrt{x+4} + x + 4, \quad 2\sqrt{x+4} = 2x - 4, \quad \sqrt{x+4} = x - 2.$$

Keliame kvadratu dar kartą:

$$x + 4 = (x-2)^2, \quad x + 4 = x^2 - 4x + 4, \quad x^2 - 5x = 0.$$

Išsprendę gautąją lygtį gauname dvi nežinomojo reikšmes: 0 ir 5. Įstatę į pradinę lygtį šias reikšmes įsitikiname, kad $x = 5$ yra lygties sprendinys, o $x = 0$ lygčiai netinka. Taigi lygtis turi vienintelį sprendinį $x = 5$.

Dažniausiai sprendžiant iracionaliąsias lygtis su kvadratinėmis šaknimis tenka abi lygties puses kelti kvadratu. Tačiau kartais šio veiksmo neprireikia. Vis dėlto ir šiuo atveju būtina patikrinti, ar gautosios nežinomojo reikšmės yra lygties sprendiniai!

Pavyzdžiui, spręsdami lygtį $(x+2)(\sqrt{x}+1) = 0$ keičiame ją į dvi paprastas lygtis: $x + 2 = 0$ ir $\sqrt{x} + 1 = 0$. Pirmosios lygties sprendinys yra $x = -2$, o antroji sprendinių neturi. Tačiau įstatę reikšmę $x = -2$ į pradinę lygtį matome, kad ji nėra jos sprendinys, nes nepriklauso lygties apibrėžimo sričiai.

Iracionaliosios lygtys su kubinėmis ir aukštesnio laipsnio šaknimis sprendžiamos panašiai kaip lygtys su kvadratinėmis šaknimis.

5 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $\sqrt[3]{x+2} = -1$.
Lygtį spręsime keldami abi jos puses kubu:

$$\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3 = (-1)^3, \quad x + 2 = -1, \quad x = -3.$$

Kai abi lygties puses keliame kubu arba kitu nelyginiu laipsniu, visada gauname lygtį, ekvivalenčią pradinei. Tačiau pasitikrinti, ar gautos nežinomojo reikšmės yra lygties sprendiniai, vis tiek pravartu!

6 PAVYZDYS. Išspręskime iracionaliąją lygtį $\sqrt[3]{x+\sqrt{2}} = x$.
Pakelkime abi lygties puses kubu:

$$\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{2}}\right)^3 = x^3, \quad x + \sqrt{2} = x^3; \quad x^3 - x - \sqrt{2} = 0.$$

Pertvarkykime gautosios kubinės lygties kairiąją pusę:

$$x^3 - x - \sqrt{2} = x^3 - 2x + x - \sqrt{2} = x(x^2 - 2) + x - \sqrt{2} =$$
$$= x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) + x - \sqrt{2} = (x-\sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Gavome lygtį:

$$(x-\sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 1) = 0.$$

Kadangi lygtis $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$ sprendinių neturi (įsitikinkite), tai $x = \sqrt{2}$ yra vienintelis duotosios lygties sprendinys.

1 užduotis. Patikrinkite, kad gautoji reikšmė tikrai yra lygties sprendinys, t. y. patikrinkite lygybę $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Kartais iracionaliąsias lygtis pavyksta išspręsti pakeitus nežinomąjį.

7 PAVYZDYS. Išspręskime iracionaliąją lygtį $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$.
Kadangi $x = (\sqrt{x})^2$, tai pažymėję $y = \sqrt{x}$ gausime lygtį $y^2 - 3y + 2 = 0$. Ši lygtis turi du sprendinius: $y_1 = 1$ ir $y_2 = 2$. Pradinės lygties sprendinius rasime iš lygčių $\sqrt{x} = 1$, $\sqrt{x} = 2$. Taigi $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

8 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $2x^{\frac{1}{3}} + 5x^{\frac{1}{6}} = 18$.
Pastebėkime, kad $x^{\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2$. Spręskime pakeisdami nežinomąjį: $y = x^{\frac{1}{6}}$. Gausime lygtį $2y^2 + 5y - 18 = 0$, kurios sprendiniai yra $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{9}{2}$. Pradinės lygties sprendinių ieškome iš lygčių $x^{\frac{1}{6}} = 2$, $x^{\frac{1}{6}} = -\frac{9}{2}$. Antroji lygtis sprendinių neturi, nes $x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$ gali įgyti tik teigiamas reikšmes. Spręsdami pirmąją lygtį gauname: $x^{\frac{1}{6}} = 2$, $x = 64$. Įstatę šią reikšmę į lygtį įsitikiname, kad ji yra sprendinys.
Taigi pradinė lygtis turi vieną sprendinį $x = 64$.

2 užduotis. Iracionaliąją lygtį

$$\frac{2x+1}{x} - \sqrt{\frac{2x+1}{x}} = 2$$

išspręskite pakeitę nežinomąjį taip: $t = \sqrt{\frac{2x+1}{x}}$.

! Ir dar kartą primename: gavę iracionaliosios lygties nežinomojo reikšmes patikrinkite, ar jos yra lygties sprendiniai! Šitaip visada išvengsite apmaudžių klaidų.

Pratimai ir uždaviniai

79. Ar ekvivalenčios lygtys:

a) $\sqrt{x+1} = \sqrt{2-x}$ ir $x + 1 = 2 - x$;

b) $\sqrt{10-x} = x + 2$ ir $10 - x = (x+2)^2$;

c) $\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-4} = \sqrt{30}$ ir $\sqrt{(x+3)(x-4)} = \sqrt{30}$;

d) $\sqrt{(x+2)^2} = \sqrt{10}$ ir $x + 2 = \sqrt{10}$;

e) $\sqrt{x^2 - 5x - 6} = 4$ ir $x^2 - 5x - 6 = 16$;

f) $\sqrt[4]{(x+1)^4} = 2$ ir $|x+1| = 2$;

g) $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} = 1$ ir $\sqrt{x^2} = 1$?

80. Išspręskite iracionaliąją lygtį:

a) $(x^2-10)\sqrt{x+3}=0$;
b) $(x^2-5x+6)\sqrt{3x-7}=0$;
c) $(3-x^2)\sqrt{2x^2+x-6}=0$;
d) $(x-4)\sqrt{3+2x-x^2}=0$;
e) $\sqrt{x^2+8}=2x+1$;
f) $\sqrt{2x-1}=x-2$;
g) $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1$;
h) $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$;
i) $\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}=2$;
j) $\sqrt{\frac{2x}{1+2x}}+\sqrt{\frac{1+2x}{2x}}=\frac{5}{2}$;
k) $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}+\sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}}=\frac{13}{6}$;
l) $\sqrt[3]{x+6}-\sqrt[3]{x-2}=2$;
m) $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{x+14}=2$;
n) $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt{x-3}$.

81. Įrodykite, kad lygtis

a) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{1-x}=0$;
b) $\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}=x+x^3$;
c) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{-x}=0$;
d) $\frac{1}{\sqrt{3x-1}}+\frac{1}{\sqrt{1-3x}}=3$

neturi sprendinių.

4.5. Nelygybės

Kai norime nustatyti, su kuriomis kintamojo reikšmėmis vienas reiškinys įgyja mažesnes (arba didesnes) reikšmes negu kitas reiškinys, sprendžiame nelygybę. Panagrinėkime, kaip sprendžiamos nelygybės

$$A(x)<B(x),\quad A(x)>B(x),\quad A(x)\leqslant B(x),\quad A(x)\geqslant B(x);$$

čia $A(x)$ ir $B(x)$ — reiškiniai su vienu kintamuoju; dažnai vienas iš šių reiškinių būna tiesiog skaičius. Kintamąjį, kurio reikšmių ieškome, paprastai vadiname nežinomuoju.

Nelygybės su vienu nežinomuoju apibrėžimo sritimi vadinama aibė tų nežinomojo reikšmių, su kuriomis visi nelygybės reiškiniai turi prasmę.
Nežinomojo reikšmę vadiname nelygybės sprendiniu, jei su ja nelygybė tampa teisinga skaitine nelygybe.
Išspręsti nelygybę — reiškia surasti visus jos sprendinius arba įrodyti, kad nelygybė jų neturi.

1 PAVYZDYS.
a) Nelygybės $x^2<-1$ apibrėžimo sritis yra visų realiųjų skaičių aibė, bet sprendinių ji neturi.
b) Nelygybės $x^2>0$ apibrėžimo sritis — taip pat visų realiųjų skaičių aibė, o sprendiniai — visi x, $x\neq 0$.

Spręsdami nelygybes jas pertvarkome — sudėtingesnes keičiame paprastesnėmis, bet turinčiomis tuos pačius sprendinius.

Jei dvi nelygybės turi tuos pačius sprendinius arba abi sprendinių neturi, tai jos vadinamos ekvivalenčiomis.

Pertvarkydami nelygybes dažnai remiamės tokiais teiginiais:

1) jei prie abiejų nelygybės pusių pridėsime (iš abiejų pusių atimsime) po tą patį skaičių, tai gausime ekvivalenčią pirmajai nelygybę;
2) jei abi nelygybės puses padauginsime (padalysime) iš to paties teigiamojo skaičiaus, tai gausime ekvivalenčią pirmajai nelygybę;
3) jei abi nelygybės puses padauginsime (padalysime) iš to paties neigiamojo skaičiaus ir pakeisime nelygybės ženklą priešingu, tai gausime ekvivalenčią pirmajai nelygybę.

Šie teiginiai įrodomi remiantis skaitinių nelygybių savybėmis. Prisiminkime jas. Tegu a, b, c, d ir e yra realieji skaičiai, $d > 0$ ir $e < 0$. Jeigu teisinga nelygybė

$$a < b,$$

tai teisingos ir nelygybės:

$$a + c < b + c, \quad ad < bd, \quad ae > be.$$

Įrodykime, pavyzdžiui, kad 1 teiginys yra teisingas. Iš tikrųjų, jeigu su kintamojo reikšme $x = u$ nelygybė $A(x) < B(x)$ pavirsta teisinga skaitine nelygybe

$$A(u) < B(u),$$

tai pridėję prie abiejų jos pusių po tą patį skaičių c gausime teisingą skaitinę nelygybę

$$A(u) + c < B(u) + c.$$

Tai reiškia, kad bet kuris nelygybės

$$A(x) < B(x)$$

sprendinys yra ir nelygybės

$$A(x) + c < B(x) + c$$

sprendinys. Panašiai įsitikintume, kad kiekvienas pastarosios nelygybės sprendinys yra ir nelygybės $A(x) < B(x)$ sprendinys. Jeigu viena iš šių nelygybių neturėtų sprendinių, tai jų negalėtų turėti ir kita. Taigi abi nelygybės yra ekvivalenčios.

Panašiai samprotaudami galime įsitikinti, kad ir kiti du teiginiai apie nelygybes yra teisingi.

Jeigu prie abiejų nelygybės pusių pridėtume po tą patį reiškinį, turintį prasmę visoje nelygybės apibrėžimo srityje, tai taip pat gautume ekvivalenčią nelygybę. Tačiau jeigu reiškinys su kuriomis nors nežinomojo reikšmėmis iš nelygybės apibrėžimo srities yra neapibrėžtas, tai naujoji nelygybė gali būti neekvivalenti pradinei.

2 PAVYZDYS. Nelygybės

$$x > -1 \quad \text{ir} \quad x^2 + x > x^2 - 1$$

yra ekvivalenčios, tačiau nelygybės

$$x > -1 \quad \text{ir} \quad \frac{1}{x} + x > \frac{1}{x} - 1$$

nėra ekvivalenčios, nes $x = 0$ nėra antrosios nelygybės sprendinys.

Kai abi nelygybės puses dauginame (arba dalijame) iš reiškinio, apibrėžto visoje realiųjų skaičių aibėje ir įgyjančio tik teigiamas reikšmes (pavyzdžiui, iš reiškinio $x^4 + x^2 + 1$), gauname ekvivalenčią nelygybę.

3 PAVYZDYS. Nelygybės

$$\frac{1}{1 + x^2} > 1 \quad \text{ir} \quad 1 > 1 + x^2$$

yra ekvivalenčios (abi jos neturi sprendinių).

Dauginti (arba dalyti) nelygybę iš reiškinio, įgyjančio tiek teigiamas, tiek ir neigiamas reikšmes, jokiu būdu negalima — šitaip galima gauti neekvivalenčias nelygybes! Pavyzdžiui, jei padalytume nelygybę $x > 1$ iš x, tai gautume nelygybę $1 > \frac{1}{x}$. Bet kuris neigiamasis skaičius yra šios nelygybės sprendinys, tačiau netinka nelygybei $x > 1$, taigi nelygybės nėra ekvivalenčios.

Prisiminkime, kaip sprendžiamos nelygybės $ax < b$.

4 PAVYZDYS. Raskime nelygybės sprendinius:
a) $2x < -1$; b) $-2x < -1$; c) $0 \cdot x < -1$; d) $0 \cdot x < 1$; e) $0 \cdot x < 0$.

Padaliję a) nelygybės abi puses iš 2 gausime $x < -\frac{1}{2}$. Taigi a) nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $(-\infty; -\frac{1}{2})$. Analogiškai sprendžiame ir b) nelygybę. Padaliję abi puses iš -2 gauname $x > \frac{1}{2}$, t. y. b) nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $(\frac{1}{2}; +\infty)$. Įsižiūrėkime į c) nelygybę. Įstatę į nelygybę bet kokią x reikšmę gauname $0 < -1$, t. y. gauname klaidingą nelygybę. Taigi c) nelygybė neturi nė vieno sprendinio. Įstatę bet kokią reikšmę į d) nelygybę gauname teisingą nelygybę $0 < 1$. Taigi d) nelygybės sprendiniai yra visi realieji skaičiai. Panašiai samprotaudami galime įsitikinti, kad e) nelygybė sprendinių neturi.

1 užduotis. Raskite nelygybės sprendinius:
a) $-2x \leqslant -1$; b) $2x \leqslant -1$; c) $0 \cdot x \geqslant -1$; d) $0 \cdot x \leqslant 1$; e) $0 \cdot x \leqslant 0$.

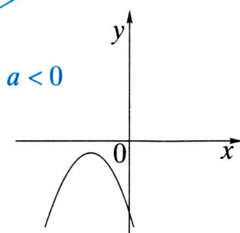
Panagrinėsime, kaip sprendžiamos kvadratinės nelygybės

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{ir} \quad ax^2 + bx + c > 0 \quad (\text{čia } a \neq 0).$$

Kvadratinio trinario funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ grafikas yra parabolė, kurios šakos nukreiptos aukštyn, kai $a > 0$, ir žemyn, kai $a < 0$. Jei lygties $ax^2 + bx + c = 0$ diskriminantas $D = b^2 - 4ac$ neigiamas, tai lygtis sprendinių neturi, o $y = ax^2 + bx + c$ grafikas nekerta abscisių ašies.

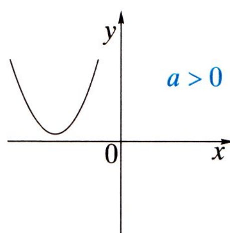
Tada kvadratinis trinaris $ax^2 + bx + c$ su visais x įgyja vien teigiamas reikšmes, kai $a > 0$, ir vien neigiamas, kai $a < 0$.

$a < 0$



$y = ax^2 + bx + c$

$D = b^2 - 4ac < 0$



$a > 0$

Nelygybės $ax^2 + bx + c < 0$ sprendiniai — visi realieji skaičiai.
Nelygybė $ax^2 + bx + c > 0$ sprendinių neturi.

Nelygybė $ax^2 + bx + c < 0$ sprendinių neturi.
Nelygybės $ax^2 + bx + c > 0$ sprendiniai — visi realieji skaičiai.

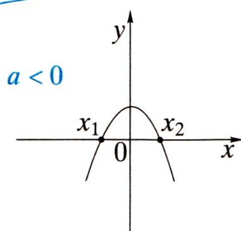
2 užduotis. Nustatykite, kokius sprendinius gali turėti nelygybės $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, kai $a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac = 0$.

Dabar panagrinėkime nelygybes

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{ir} \quad ax^2 + bx + c > 0,$$

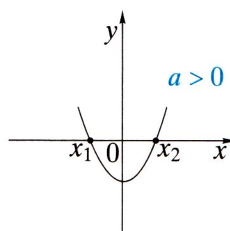
kai $a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac > 0$. Tada lygtis $ax^2 + bx + c = 0$ turi du sprendinius x_1 ir x_2, o funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ grafikas kerta Ox ašį dviejuose taškuose x_1 ir x_2. Nelygybių sprendinius galime nustatyti iš atitinkamų grafikų.

$a < 0$



$y = ax^2 + bx + c$

$D = b^2 - 4ac > 0$



$a > 0$

Nelygybės $ax^2 + bx + c < 0$ sprendinių aibė: $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.
Nelygybės $ax^2 + bx + c > 0$ sprendinių aibė: $(x_1; x_2)$.

Nelygybės $ax^2 + bx + c < 0$ sprendinių aibė: $(x_1; x_2)$.
Nelygybės $ax^2 + bx + c > 0$ sprendinių aibė: $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

3 užduotis. Išspręskite nelygybę:

a) $2x^2 - 3x + 4 < 0$; b) $x^2 + 7x + 6 < 0$.

4.6. Nelygybių sprendimas intervalų metodu

Nelygybių

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{ir} \quad ax^2 + bx + c > 0$$

sprendinius, kai $a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac > 0$, radome naudodamiesi kvadratinės funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ grafiku. Šias nelygybes galima spręsti ir kitaip. Kadangi $a \neq 0$ ir $D > 0$, tai lygtis $ax^2 + bx + c = 0$ turi du skirtingus sprendinius x_1 ir x_2, o kvadratinį trinarį galima išskaidyti taip:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

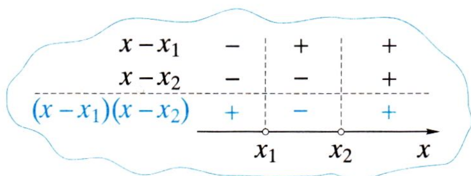
Tarkime, kad $a > 0$. Nelygybių

$$a(x - x_1)(x - x_2) < 0 \quad \text{ir} \quad a(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

abi puses padaliję iš a gausime nelygybes

$$(x - x_1)(x - x_2) < 0, \qquad (x - x_1)(x - x_2) > 0.$$

Jei $a < 0$, tai padalįję abi nelygybių puses iš a turime pakeisti nelygybių ženklus. Taigi gautume tas pačias nelygybes, tik užrašytas kita tvarka. Tarkime, kad $x_1 < x_2$, ir panagrinėkime nelygybę $(x - x_1)(x - x_2) < 0$. Atidėkime skaičių tiesėje skaičius x_1 ir x_2, kurie nėra mūsų nelygybės sprendiniai. Šiuos skaičius atitinkantys taškai padalija tiesę į tris intervalus. Kai $x > x_1$, tai $x - x_1 > 0$, kai $x < x_1$, tai $x - x_1 < 0$. Taigi viename iš trijų intervalų reiškinys $x - x_1$ yra neigiamas, o dviejuose teigiamas. Panašiai samprotaudami užrašykime reiškinio $x - x_2$ ženklus.

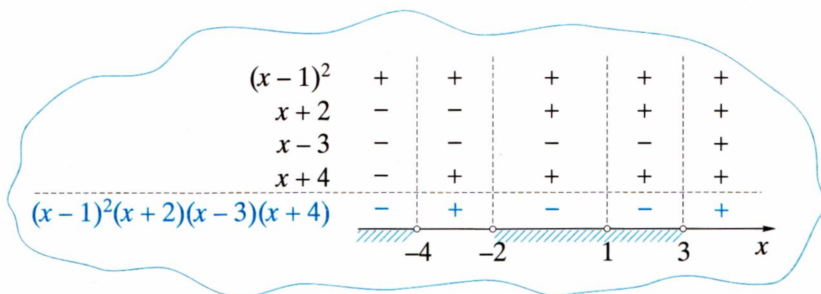


Dabar jau galime nustatyti sandaugos $(x - x_1)(x - x_2)$ ženklus visuose trijuose intervaluose.

Taigi nelygybės $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ sprendinių aibė yra intervalas $(x_1; x_2)$. Savo ruožtu nelygybės $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ sprendinių aibė yra dviejų intervalų sąjunga: $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Šis nelygybių sprendimo būdas vadinamas *intervalų metodu.* Jis tinka ne tik kvadratinėms nelygybėms spręsti.

1 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $(x-1)^2(x+2)(x-3)(x+4) < 0$.
Nežinomojo reikšmės -4, -2, 1 ir 3, su kuriomis kairioji nelygybės pusė lygi nuliui, dalija skaičių tiesę į penkis intervalus.
Surašykime daugiklių ženklus šiuose intervaluose ir nustatykime sandaugos ženklus:



Taigi nelygybės sprendinių aibė yra tokia intervalų sąjunga:
$(-\infty; -4) \cup (-2; 1) \cup (1; 3)$.

Pastebėkime, kad tą pačią sprendinių aibę turi ir nelygybė

$$\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-3)(x+4)} < 0.$$

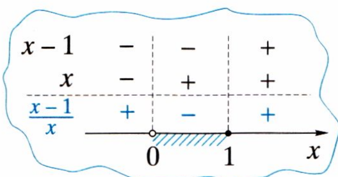
Taigi intervalų metodas tinka ir tada, kai vienoje nelygybės pusėje vietoj reiškinių sandaugos yra dalmuo.

Kai nelygybės yra negriežtos, sprendžiant intervalų metodu būtinai reikia patikrinti, ar skaičių tiesės dalijimo taškai yra nelygybės sprendiniai.

2 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $\frac{1}{x} \geqslant 1$.
Pertvarkę gausime:

$$\frac{1}{x} - 1 \geqslant 0, \quad \frac{1-x}{x} \geqslant 0, \quad \frac{x-1}{x} \leqslant 0.$$

Skaičių tiesė taškais $x = 0$ ir $x = 1$ padalijama į tris intervalus. Surašykime reiškinių $x - 1$ ir x bei dalmens ženklus:



Patikrinę gauname, kad $x = 1$ yra nelygybės sprendinys, o $x = 0$ nepriklauso nelygybės apibrėžimo sričiai. Intervalų metodu nustatome, kad visi intervalo $(0; 1)$ skaičiai taip pat yra nelygybės sprendiniai. Taigi nelygybės sprendiniai sudaro pusatvirį intervalą $(0; 1]$.

3 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę

$$\frac{x^3-1}{x^2-5x+6} \geqslant 0.$$

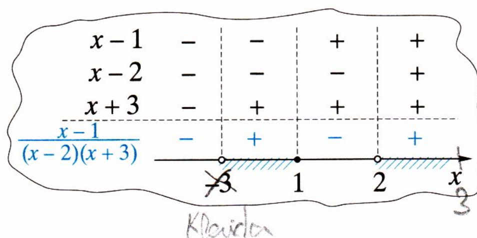
Išskaidę dauginamaisiais gauname:

$$\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-2)(x+3)} \geqslant 0.$$

Kvadratinio trinario x^2+x+1 diskriminantas yra neigiamas, todėl reiškinys x^2+x+1 su visomis kintamojo reikšmėmis įgyja tik teigiamas reikšmes. Todėl abi nelygybės puses padalinę iš šio reiškinio gausime ekvivalenčią nelygybę

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+3)} \geqslant 0.$$

Intervalų metodu gauname tokią nelygybės sprendinių aibę: $(-3; 1] \cup (2; +\infty)$.



Pratimai ir uždaviniai

82. Išspręskite nelygybę:

a) $3x+7>5x-8$;
b) $\frac{x-1}{6}+x \geqslant \frac{2x+1}{2}-\frac{3}{4}$;
c) $2x-3>x-(3-x)$;
d) $x+12-0{,}1(x+1)>\frac{2x}{3}+0{,}1(9x+19)$;
e) $\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{3}\right)<\frac{3}{5}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{7}{9}$;
f) $\frac{8}{15}(x+10)-24{,}5 \geqslant \frac{7x}{10}-0{,}4(11x-5)$.

83. Išspręskite nelygybę:

a) $\frac{3x-5}{x-4} \leqslant 2$;
b) $\frac{x-2}{x-3}<\frac{1}{2}$;
c) $\frac{x-3}{x-7} \geqslant 5$;
d) $\frac{3x-2}{x-6} \leqslant 1$;
e) $3x^2-5x+2>0$;
f) $5x^2-7x+2<0$;
g) $3x^2-2x+5 \geqslant 0$;
h) $\frac{x-1}{x^2-7x+12}<0$;
i) $\frac{x^2-7x+6}{x-2} \leqslant 0$;
j) $\frac{x+3}{x^2-8x+15}>0$;
k) $\frac{x^2-x+5}{x^2-7x+12}<0$;
l) $\frac{x^2-6x+5}{x^2-5x+6}>0$;
m) $\frac{x^2+x-6}{x^2-7x+12} \leqslant 0$;
n) $\frac{2x^2+2x+25}{x^2+8x+15}<1$;
o) $\frac{3x^2-20x+45}{x^2-4x+5}<2$;
p) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-6x+8} \leqslant 1$;
r) $\frac{x^3-8}{x^4-16}<0$;
s) $\frac{5x+4}{5x^2-6x+1}<\frac{1}{x-2}$.

84. Ar ekvivalenčios nelygybės:

a) $2x - 3 - \frac{1}{x-5} < x - 4 - \frac{1}{x-5}$ ir $2x - 3 < x - 4$;

b) $3x - 1 < x + 3$ ir $(3x - 1)^2 < (x + 3)^2$;

c) $x^3 < -1$ ir $x < -1$;

d) $\frac{(x-3)(x-4)^2}{5-x} > 0$ ir $\frac{x-3}{5-x} > 0$;

e) $\frac{1}{4x^2} > \frac{1}{(x-1)^2}$ ir $(x - 1)^2 > 4x^2$;

f) $\frac{(x-1)(x-5)^2}{3-x} > 0$ ir $\frac{x-1}{3-x} > 0$;

g) $x + \frac{x-2}{3} > \frac{x-3}{4} + \frac{x-1}{2}$ ir $x + 1 > 0$?

85. Su kuriomis m reikšmėmis lygtis $mx^2 - (1 - 2m)x + m = 0$ turi du skirtingus sprendinius?

86. Su kuriomis m reikšmėmis nelygybę $x^2 + 2(m + 1)x + 9m - 5 > 0$ tenkina bet kurios x reikšmės?

87. Su kuriomis sveikosiomis m reikšmėmis lygties $3 + 2{,}5x = 3m - 1{,}5x + \frac{m-5}{2}x$ sprendiniai didesni už 3?

88. Su kuriomis sveikosiomis m reikšmėmis lygties $\frac{2x(m+1)}{m} = 3(1 + x) + \frac{7}{m}$ sprendiniai yra mažesni už -5?

89. Moksleivis sąsiuvinių gali nusipirkti dviejose parduotuvėse. Viena parduotuvė yra šalia namų — čia sąsiuvinis kainuoja 2 Lt. Kita parduotuvė yra toliau — į ją reikia važiuoti autobusu. Kelionė ten ir atgal kainuoja 1 Lt. Tačiau šioje parduotuvėje vieno sąsiuvinio kaina — 1,8 Lt. Suraskite, kiek mažiausiai sąsiuvinių moksleivis turi pirkti, kad jam vertėtų pasirinkti tolimesnę parduotuvę.

90. Kateris nuplaukė upe žemyn 20 km ir grįžo atgal. Upės tėkmės greitis 3 km/h. Koks turi būti katerio greitis stovinčiame vandenyje, kad visa kelionė truktų ne daugiau kaip 5 val.?

91. Taksi vairuotojas įsigijo dujų įrangą, kuri kainavo 1080 Lt. Jo automobilis 100 km suvartoja 6 ℓ benzino arba 10 ℓ dujų. Vienas litras benzino kainuoja 3 Lt, o dujų — 1,5 Lt. Po kelerių metų dujų įranga atsipirks, jei taksi vairuotojas kas mėnesį nuvažiuoja po 1000 km?

92. Du darbininkai dirbdami kartu darbą atlieka ne daugiau kaip per 4 valandas. Jeigu pirmasis darbininkas dirbtų vienas, tai jis darbą atliktų 6 valandomis greičiau negu antrasis dirbdamas vienas. Kiek daugiausiai valandų gali užtrukti pirmasis darbininkas atlikdamas visą darbą?

93. Teigiamos nesuprastinamos trupmenos skaitiklis yra didesnis už 2, o vardiklis — vienetu didesnis už skaitiklio kvadratą. Jeigu prie skaitiklio ir vardiklio pridėtume po 5 vienetus, tai trupmenos reikšmė taptų didesnė už $\frac{1}{2}$. Kokia ši trupmena?

4.7. Lygčių ir nelygybių sistemos

Dažnai tenka spręsti ne vieną lygtį ar nelygybę, bet keletą ieškant jų bendrų sprendinių. Tuomet sakome, kad sprendžiame lygčių ar nelygybių sistemą.

Sistemos būna įvairios: vienos jų sudarytos tik iš lygčių, kitos — tik iš nelygybių, tačiau į sistemą gali įeiti ir lygtys, ir nelygybės. Sistema gali turėti vieną arba daugiau nežinomųjų.

Lygčių ir nelygybių sistemos nežinomųjų reikšmių, su kuriomis visų lygčių ir nelygybių reiškiniai apibrėžti, aibę vadiname sistemos apibrėžimo sritimi.
Nežinomųjų reikšmių rinkinius, kuriuos įstatę į sistemos lygtis ir nelygybes gauname teisingas skaitines lygybes ir nelygybes, vadiname sistemos sprendiniais.

Išspręsti sistemą — reiškia rasti visus jos sprendinius (arba įrodyti, kad jų nėra).

Kai sistema sudėtinga, ją pertvarkome keisdami paprastesne, tačiau ekvivalenčia sistema.

Jeigu dvi lygčių ir nelygybių sistemos turi tuos pačius sprendinius (arba abi jų neturi), tai jos vadinamos ekvivalenčiomis.

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygčių sistemą $\begin{cases}(x-1)(x^2-5x+6)=0,\\(x-2)(x^2+4x+3)=0.\end{cases}$

Pirmosios lygties sprendiniai yra $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, o antrosios — $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$. Abiem sistemos lygtims tinka tik sprendinys $x = 2$. Taigi sistema turi vieną sprendinį $x = 2$.

2 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybių sistemą $\begin{cases}3(x-5)<2(x-1)+7,\\x^2<20x+21.\end{cases}$

Ekvivalenčiai pertvarkę kiekvieną nelygybę gausime nelygybių sistemą, ekvivalenčią pradinei:

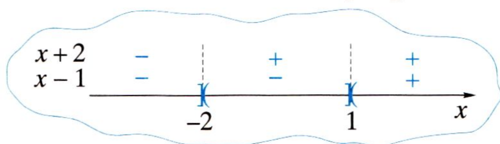
$$\begin{cases}3x-15<2x-2+7,\\x^2-20x-21<0;\end{cases} \qquad \begin{cases}x<20,\\(x+1)(x-21)<0.\end{cases}$$

Taigi pirmosios nelygybės sprendiniai sudaro intervalą $(-\infty; 20)$. Išsprendę intervalų metodu antrąją nelygybę gauname, kad jos sprendinių aibė yra $(-1; 21)$.

Tada sprendiniai, tenkinantys abi sistemos nelygybes, yra intervalo $(-1; 20)$ skaičiai. Šis intervalas ir yra nelygybių sistemos sprendinių aibė.

Kartais sprendžiant vieną lygtį ar nelygybę tenka sudaryti ir spręsti sistemas.

3 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $2|x-1| = |x+2| + 1$.
Lygties apibrėžimo sritį, t. y. visą realiųjų skaičių aibę, suskaidykime į tris intervalus, kuriuose reiškiniai $x-1$ ir $x+2$ yra pastovaus ženklo arba lygūs nuliui.



Nagrinėdami lygtį kiekviename iš šių intervalų galėsime parašyti ją be modulio ženklo. Šitaip gauname tris sistemas:

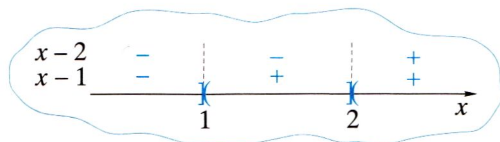
1) $\begin{cases} x \leqslant -2, \\ -2x+2 = -x-2+1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -2 < x \leqslant 1, \\ -2x+2 = x+2+1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > 1, \\ 2x-2 = x+2+1. \end{cases}$

Dabar jas pertvarkykime:

1) $\begin{cases} x \leqslant -2, \\ x = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -2 < x \leqslant 1, \\ x = -\frac{1}{3}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > 1, \\ x = 5. \end{cases}$

Pirmoji sistema sprendinių neturi, antrosios sprendinys yra $x = -\frac{1}{3}$, o trečiosios $x = 5$.
Taigi lygties sprendiniai yra $x = -\frac{1}{3}$ ir $x = 5$.

4 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $|x-1| + |x-2| = 1$.
Kaip ir spręsdami 3 pavyzdžio lygtį suskaidykime skaičių tiesę taškais $x = 1$ ir $x = 2$ į tris intervalus.



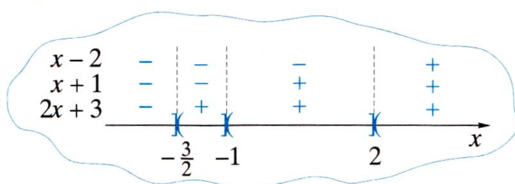
Nagrinėdami lygtį kiekviename iš šių intervalų gauname tris sistemas:

1) $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ -x+1-x+2 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 < x \leqslant 2, \\ x-1-x+2 = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > 2, \\ x-1+x-2 = 1. \end{cases}$

Pirmoji sistema turi sprendinį $x = 1$. Antrosios sprendinių aibė sudaro intervalą $(1; 2]$, o trečioji sistema sprendinių neturi. Taigi duotosios lygties sprendinių aibė yra uždaras intervalas $[1; 2]$.

Naudojant šį metodą patogu spręsti ir nelygybes su moduliais.

5 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $|x+1| + 3|x-2| - |2x+3| < x$.
Padaliję skaičių tiesę į keturis intervalus kiekviename iš jų nustatome pomodulinių reiškinių ženklus.



Gauname keturias nelygybių sistemas:

1) $\begin{cases} x \leqslant -\frac{3}{2}, \\ -x - 1 - 3(x-2) + 2x + 3 < x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -\frac{3}{2} < x \leqslant -1, \\ -x - 1 - 3(x-2) - (2x+3) < x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -1 < x \leqslant 2, \\ x + 1 - 3(x-2) - (2x+3) < x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x > 2, \\ x + 1 + 3(x-2) - (2x+3) < x. \end{cases}$

Šios sistemos atitinkamai ekvivalenčios tokioms sistemoms:

1) $\begin{cases} x \leqslant -\frac{3}{2}, \\ x > \frac{8}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -\frac{3}{2} < x \leqslant -1, \\ x > \frac{2}{7}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -1 < x \leqslant 2, \\ x > \frac{4}{5}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x > 2, \\ x < 8. \end{cases}$

Pirmoji ir antroji sistemos sprendinių neturi, trečiosios sistemos sprendinių aibė yra intervalas $\left(\frac{4}{5}; 2\right]$, o ketvirtosios — $(2; 8)$. Sujungę šiuos du intervalus gauname, jog pradinės nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $\left(\frac{4}{5}; 8\right)$.

Kartais paprastas lygtis ir nelygybes su moduliais galime išspręsti ir nedalydami apibrėžimo srities intervalais. Pavyzdžiui, pažvelgę į lygtį $|x-5| = 1$ iš karto suprasime, kad turi būti arba $x - 5 = 1$, arba $x - 5 = -1$. Taigi šios lygties sprendiniai yra $x_1 = 6$, $x_2 = 4$.

O štai spręsdami nelygybę $|x - 5| < 1$ galime samprotauti taip: kadangi skaičiaus modulis yra lygus jį vaizduojančio skaičių tiesės taško atstumui iki nulio taško, tai nelygybę tenkins tik tos nežinomojo reikšmės, su kuriomis $x - 5$ patenka į intervalą $(-1; 1)$, t. y. $-1 < x - 5 < 1$. Šią dvigubą nelygybę pakeitę nelygybių sistema

$$\begin{cases} x - 5 < 1, \\ -1 < x - 5 \end{cases}$$

ir ją išsprendę gauname, kad pradinės nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $(4; 6)$.

Dažniausiai lygties ar nelygybės apibrėžimo sritis būna sudaryta iš vieno ar kelių intervalų. Tačiau kartais pasitaiko, kad apibrėžimo sritį sudaro vos keli skaičiai arba ji iš viso tuščia. Jeigu apibrėžimo sritis — tuščioji aibė, tai ir lygtis ar nelygybė sprendinių neturi; jeigu apibrėžimo sritį sudaro keli skaičiai — pakanka patikrinti, kurie iš jų yra lygties sprendiniai.

6 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį:

a) $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 3$; b) $\sqrt{-|x(x-1)|} = 2$; c) $x + \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = 1$.

a) Lygties $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 3$ apibrėžimo sritį nusako nelygybių sistema $\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ 1 - x \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 1, \end{cases}$ kuri neturi sprendinių. Taigi ir duotoji lygtis sprendinių neturi.

b) Lygties $\sqrt{-|x(x-1)|} = 2$ apibrėžimo sritį sudaro du skaičiai $x = 0$ ir $x = 1$, tačiau nei pirmasis, nei antrasis lygties netenkina. Taigi ir ši lygtis sprendinių neturi.

c) Lygties $x + \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = 1$ apibrėžimo sritį sudaro vienintelis skaičius $x = 1$, kuris yra lygties sprendinys.

Pratimai ir uždaviniai

94. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases}(x+2)(x^2-4x+3)=0,\\(x-1)(x^2-x-6)=0;\end{cases}$ b) $\begin{cases}(x+3)(x^2-x-6)=0,\\(x+2)(x^2-5x+4)=0;\end{cases}$

c) $\begin{cases}(x^2-1)(x^2-5x+6)=0,\\(x^2-4)(x^2-6x+5)=0;\end{cases}$ d) $\begin{cases}(x^2-4x+3)(x^2+x-6)=0,\\(x^2+4x+3)(x^2-7x+10)=0.\end{cases}$

95. Išspręskite nelygybių sistemą:

a) $\begin{cases}x+12-0{,}1(x+1)>\frac{2x}{3}+0{,}1(9x+19),\\3(2x-3)>4(x+1)+13;\end{cases}$

b) $\begin{cases}1+1{,}5x<-1{,}4-5(x-1),\\2(x+1)+3(1-x)<2(x-5);\end{cases}$

c) $\begin{cases}\frac{x}{8}-\frac{5x-4}{12}<\frac{x-2}{6}-\frac{x+1}{3}-\frac{3x}{4}+6,\\x-\frac{x-1}{2}-\frac{x+2}{3}>\frac{x-3}{4};\end{cases}$

d) $\begin{cases}x^2-9x+14<0,\\x-4<0;\end{cases}$

e) $\begin{cases}x^2+6x+5<0,\\x^2+4x+3>0;\end{cases}$

f) $\begin{cases}\frac{x^2+2x-9}{x}<2,\\x^2<25.\end{cases}$

96. Išspręskite lygtį:

a) $|x|=x+2;$ b) $|2x-5|=x-1;$

c) $|x-1|+|x-2|=1;$ d) $|7x-12|-|7x-11|=1;$

e) $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=1;$ f) $\frac{|x+2|}{2-|x|}=1.$

97. Su kuriomis p reikšmėmis lygtis

a) $|x-1|+|2x-3|=p;$

b) $|x+1|-|x-1|=p$

turi bent vieną sprendinį?

98. Išspręskite nelygybę:

a) $2|3x+4|<|x-2|;$ b) $|x-3|+|x+2|>x+5;$

c) $x(x-6)+15\leqslant 3|x-1|;$ d) $(x-1)^2+|x-1|\leqslant 2;$

e) $\left|\frac{x^2+3x+14}{x-x^2-4}\right|\geqslant 2;$ f) $|x|(x^2-2x-3)\geqslant 0;$

g) $|x^2-1|<x^2-|x|+1;$ h) $\frac{|x+1|+|x-2|}{x+199}<1.$

4.8. Lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos

Jeigu lygtis turi du nežinomuosius, tai jos sprendinys yra tokia skaičių pora, kad įstatę vietoj nežinomųjų atitinkamus šios poros skaičius gauname teisingą skaitinę lygybę. Pavyzdžiui, skaičių pora $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$ yra lygties $x^2 + y^2 = 5$ sprendinys. Lygties su dviem nežinomaisiais sprendinius patogu vaizduoti koordinačių plokštumos taškais. Dažniausiai tokia lygtis turi be galo daug sprendinių, o juos vaizduojantys taškai sudaro kokią nors kreivę. Pavyzdžiui, lygties $x^2 + y^2 = 5$ sprendinių aibę koordinačių plokštumoje atitinka spindulio $r = \sqrt{5}$ apskritimas su centru koordinačių pradžioje.

Kai sprendžiame kelias lygtis ir ieškome jų bendrųjų sprendinių, sakome, kad sprendžiame lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą. Paprasčiausia yra dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Tokios sistemos kartais turi vieną sprendinį, kartais — be galo daug, o kai kada visai jų neturi.

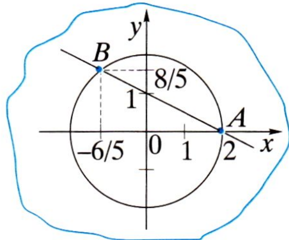
1 užduotis. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x - 3y = -1, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

Dviejų tiesinių lygčių sistemos sprendimo būdai (sudėties, keitimo) taikomi ir sudėtingesnėms lygčių sistemoms su dviem nežinomaisiais spręsti.

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygčių sistemą $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$

Iš antrosios lygties išreiškę nežinomąjį x gausime $x = 2 - 2y$. Įstatę gautą išraišką į pirmąją lygtį turėsime $(2-2y)^2 + y^2 = 4$ arba $y(5y-8) = 0$. Iš čia $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{8}{5}$. Tuomet atitinkamai $x_1 = 2$ ir $x_2 = -\frac{6}{5}$. Vadinasi, sistema turi du sprendinius $(2; 0)$ ir $\left(-\frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right)$.

Pavaizdavę pirmosios lygties sprendinius koordinačių plokštumoje gautume apskritimą, kurio spindulys lygus 2, o centras — koordinačių pradžios taške; antrosios — tiesę, einančią per taškus $(0; 1)$ ir $(2; 0)$. Apskritimo ir tiesės susikirtimo taškų koordinatės yra tiek pirmosios, tiek antrosios sistemos lygties sprendiniai, taigi — pačios sistemos sprendiniai. Sprendiniai parodo, kokiuose taškuose kertasi apskritimas ir tiesė. Susikirtimo taškai yra $A(2; 0)$ ir $B\left(-\frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right)$.



Kažkada geometrija ir algebra buvo atskiri mokslai, tarsi valstybės su sienomis. Galima sakyti, kad tas sienas panaikino prancūzų matematikas R. Dekartas (1596 – 1650), pradėjęs naudoti taškų koordinates ir šitaip plokštumos kreives susiejęs su lygtimis.
Taip ir atsirado neišardoma algebros ir geometrijos sąjunga!

2 užduotis. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x + 4y = 18. \end{cases}$

Kartais lygčių sistemą pavyksta išspręsti pakeitus nežinomuosius.

2 PAVYZDYS. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 - xy, \\ x + y = 7 - xy. \end{cases} \quad (1)$$

Pažymėkime $u = x + y$, $v = xy$. Tada

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v,$$

ir lygčių sistemą galima užrašyti taip:

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 13 - v, \\ u = 7 - v. \end{cases} \quad (2)$$

Įrašę $u = 7 - v$ į pirmąją lygtį gauname:

$$(7 - v)^2 - 2v = 13 - v,$$
$$v^2 - 15v + 36 = 0.$$

Šios lygties sprendiniai yra $v_1 = 3$, $v_2 = 12$.
Gauname tokius (2) sistemos sprendinius:

$$u_1 = 4, \quad v_1 = 3;$$
$$u_2 = -5, \quad v_2 = 12.$$

Nežinomųjų x ir y reikšmes randame išsprendę dvi lygčių sistemas:

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -5, \\ xy = 12. \end{cases}$$

Antroji lygčių sistema sprendinių neturi, o pirmoji turi du sprendinius: (1; 3) ir (3; 1).
Taigi duotosios lygčių sistemos sprendiniai yra (1; 3) ir (3; 1).

Sprendžiant sudėtingesnes lygčių sistemas, pavyzdžiui, kai abi sistemos lygtys yra kvadratinės, tenka taikyti įvairius metodus. Panagrinėsime vieną dažnai sutinkamą dviejų lygčių sistemos atvejį.

Lygtis $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, kurioje a, b, c — realieji skaičiai, o x, y — nežinomieji, vadinama homogenine lygtimi.

Pavyzdžiui, lygtys $x^2 + 2xy = 0$, $2xy + y^2 = 0$, $2x^2 + xy - y^2 = 0$ yra homogeninės.

Jei lygčių sistemoje bent viena lygtis yra homogeninė, tai tokios sistemos sprendimas supaprastėja, nes iš homogeninės lygties galima apskaičiuoti nežinomųjų santykį. Pailiustruosime šį sprendimo metodą pavyzdžiu.

3 PAVYZDYS. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - xy = 2x + 3y + 6. \end{cases}$$

Pirmoji sistemos lygtis yra homogeninė. Jeigu įstatytume į ją $y = 0$, tai gautume $x = 0$. Tačiau skaičių pora $(0; 0)$ nėra antrosios lygties sprendinys. Taigi toliau galime nagrinėti sistemą su sąlyga $y \neq 0$. Padalinę pirmąją lygtį iš y^2 gausime

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} - 3 = 0.$$

Pažymėkime $t = \frac{x}{y}$:

$$t^2 - 2t - 3 = 0.$$

Ši lygtis turi du sprendinius $t_1 = -1$, $t_2 = 3$. Todėl duotosios sistemos sprendinius gausime išsprendę dvi lygčių sistemas:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = -1, \\ x^2 - xy = 2x + 3y + 6 \end{cases}$$

ir

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 3, \\ x^2 - xy = 2x + 3y + 6. \end{cases}$$

Pirmoji ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} y = -x, \\ 2x^2 + x - 6 = 0, \end{cases}$$

kurios sprendiniai yra $(1{,}5; -1{,}5)$ ir $(-2; 2)$.
Antroji ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x = 3y, \\ 2y^2 - 3y - 2 = 0. \end{cases}$$

Ji turi sprendinius $(-1{,}5; -0{,}5)$ ir $(6; 2)$.
Taigi duotoji sistema turi keturis sprendinius: $(1{,}5; -1{,}5)$, $(-2; 2)$, $(-1{,}5; -0{,}5)$ ir $(6; 2)$.

Pratimai ir uždaviniai

99. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x - 2y = -5; \end{cases}$
b) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + 5y = 7; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 18x + 23y = 46, \\ 3x - 11y = -22; \end{cases}$
d) $\begin{cases} x + 4y = 18, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0, \\ x + y + 8 = 0; \end{cases}$
f) $\begin{cases} x + y = 5 - xy, \\ x^2 + y^2 = 7 - xy; \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48; \end{cases}$
h) $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2; \end{cases}$

i) $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 74, \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 73; \end{cases}$
j) $\begin{cases} x^2 + y = 2xy - 2, \\ x^2 + y^2 = 2xy; \end{cases}$

k) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{15}{4}, \\ x^2 - y^2 = 60; \end{cases}$
l) $\begin{cases} \frac{9}{x} - y = 1, \\ \frac{15}{x} + 2y = 9; \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2x + \frac{14}{y} = 15, \\ x - \frac{3}{y} = 2{,}5; \end{cases}$
n) $\begin{cases} |x - 2| - y = 1, \\ x - |y + 3| = -1; \end{cases}$

o) $\begin{cases} y - 2|x| = -3, \\ |y| - x = 3; \end{cases}$
p) $\begin{cases} 3|x + 1| + 2|y - 2| = 20, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$

100. Nustatykite, su kuriomis parametrų a ir b reikšmėmis lygčių sistema turi be galo daug sprendinių:

a) $\begin{cases} ax + 2by = 5, \\ 5x - 4y = a; \end{cases}$
b) $\begin{cases} 6x + y = a, \\ 2ax - by = 12. \end{cases}$

101. Nustatykite, su kuriomis parametro a reikšmėmis lygčių sistema neturi sprendinių:

a) $\begin{cases} x - 4y = 1, \\ ax + y = 1; \end{cases}$
b) $\begin{cases} x - ay = 3, \\ ax - 4y = a + 4. \end{cases}$

102. Nustatykite, su kuriomis parametro p reikšmėmis lygčių sistema turi sprendinių:

a) $\begin{cases} px^2 + y = 2, \\ x - y = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (p - 1)y^2 - 2(3p + 1)y + 9p = 0, \\ y = x + 2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} (p - 3)x^2 + (4 - p)x = y - 12, \\ px + y = 8; \end{cases}$

d) $\begin{cases} pxy + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy = -1. \end{cases}$

5. Kartojimo uždaviniai

Realiųjų skaičių aibė

1. Apskaičiuokite:

a) $4{,}5 - \left(3{,}4 + 2\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{3}{7} - 0{,}1$; b) $(2{,}6 - 1{,}49) : \left(2{,}75 + \frac{1}{4}\right) + 0{,}63$;

c) $\left(3\frac{3}{5} : 3 - 1{,}25 \cdot 4\right) \cdot \frac{5}{19}$; d) $\frac{1{,}71 - \frac{3}{5}}{(2\frac{2}{3} + 3{,}5) \cdot 0{,}06}$; e) $\frac{\frac{2}{3} \cdot 9{,}6 + \frac{6}{7} : 1\frac{3}{7} - 7}{1\frac{2}{3} + \frac{4}{5}}$.

2. Paprastąją trupmeną užrašykite dešimtaine:

a) $\frac{5}{16}$; b) $\frac{18}{125}$; c) $3\frac{8}{9}$; d) $\frac{25}{11}$; e) $\frac{4}{13}$; f) $\frac{3}{13}$; g) $\frac{127}{495}$; h) $\frac{91}{90}$; i) $\frac{4}{17}$.

3. Dešimtainę periodinę trupmeną užrašykite paprastąja:

a) $6,(7)$; b) $-2,(73)$; c) $0{,}9(8)$; d) $0{,}51(27)$; e) $0{,}723(4)$.

4. Triženklio skaičiaus $\overline{2ab}$ paskutinius du skaitmenis sukeitę vietomis gausime 9 vienetais didesnį skaičių, kuris dalijasi iš 5. Raskite skaičių $\overline{2ab}$.

5. Triženklis skaičius $\overline{a4b}$ dalijasi iš 9. Sukeitę šio skaičiaus pirmą ir paskutinį skaitmenis vietomis gausime 99 vienetais didesnį skaičių. Raskite skaičių $\overline{a4b}$.

6. Apskaičiuokite:

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{7}{3+\sqrt{2}}$; b) $\frac{3}{2-\sqrt{7}} - \frac{2}{3+\sqrt{7}}$;

c) $\left(\frac{5}{4-\sqrt{11}} + \frac{14}{\sqrt{11}+5} + \frac{8}{\sqrt{17}-3}\right) \cdot \frac{12-\sqrt{17}}{25{,}4}$;

d) $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}$;

e) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$.

7. Įrodykite, kad:

a) $\sqrt{7} - \sqrt{6} < \sqrt{6} - \sqrt{5}$;

b) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, kai n — natūralusis skaičius.

8. Kuris iš skaičių a ir b didesnis:

a) $a = 5$, $b = \frac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$; b) $a = \sqrt{2} + \sqrt{11}$, $b = \sqrt{3} + 3$;

c) $a = 6$, $b = \frac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$; d) $a = 3\sqrt{3}$, $b = \sqrt{43} - \sqrt{2}$?

9. Apskaičiuokite ir suapvalinkite 0,001 tikslumu:

a) $|\sqrt{125} - 12|$; b) $|\sqrt{8} - \sqrt{10}| + |\sqrt{10} - 2\sqrt{8}|$;

c) $\frac{|3-\sqrt{10}|}{\sqrt{10}+3}$; d) $\left|\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}\right| + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$.

10. Pasiūlykite būdą, kaip naudojantis skriestuvu ir liniuote realiųjų skaičių tiesėje atidėti skaičius $\sqrt{a}$, kai a — sveikieji teigiamieji skaičiai; racionalieji teigiamieji skaičiai.

Nurodymas. Galima remtis stačiojo trikampio aukštinės, nubrėžtos iš stačiojo kampo viršūnės, savybe.

Laipsniai ir šaknys

11. Apskaičiuokite arba suprastinkite:

a) $\sqrt{10^4 \cdot 12^2}$;

b) $\sqrt{72{,}5^2 - 71{,}5^2}$;

c) $2\sqrt{40\sqrt{12}} + 3\sqrt{5\sqrt{48}}$;

d) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$;

e) $\dfrac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}$;

f) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-4} - 3{,}6^0 \cdot 4^{\frac{1}{2}} - (-3)^{-2}$;

g) $3^{-2} : 3^{-5} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;

h) $\frac{3^{-3/4} \cdot 2^{2/3}}{5^{-2/3} \cdot 3^{1/4} \cdot 10^{2/3}} - \frac{2^{-1/2} \cdot 3^{-2}}{2^{3/2}\left(\frac{1}{3}\right)^2}$.

12. Apskaičiuokite:

a) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$;

b) $\sqrt[4]{(3-2\sqrt{2})^2} - \sqrt[4]{4}$;

c) $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}} - \sqrt{2}$;

d) $\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}} - \sqrt{2} - 1$;

e) $\sqrt{5} + \sqrt{6\sqrt{14-6\sqrt{5}}-4}$;

f) $\sqrt{4\sqrt{7-4\sqrt{3}}-1} + \sqrt{3} - 4$.

13. Parašykite skaičius $a = 2^{35}$, $b = 3^{28}$, $c = 4^{21}$, $d = 5^{14}$ didėjimo tvarka.

14. Astronomijoje vartojamas atstumo matavimo vienetas parsekas lygus atstumui, iš kurio Žemės orbitos apie Saulę spindulys matomas 1 sekundės kampu. Išreikškite parseką kilometrais, jei Žemės orbitos spindulys lygus $1{,}5 \cdot 10^8$ km.

Algebriniai reiškiniai

15. Suprastinkite reiškinį:

a) $\frac{x^2-y^2+z^2+2xz}{x^2-z^2+y^2+2xy}$; b) $\frac{a^4-2a^2+1}{a^3+a^2-a-1}$; c) $\frac{x^6+x^3y^3}{x^2-xy+y^2}$; d) $\frac{32}{a^2+4a-12} - \frac{a-6}{2-a}$;

e) $\frac{x-y}{x^2-y^2} - \left(\frac{x}{x+y} - \frac{x(x+y)}{x^2-y^2}\right) \cdot \frac{x-y}{xy}$; f) $\left(\frac{m}{m+1} - \frac{2m+2}{3m-3} + \frac{m-9}{1-m^2}\right) : \frac{3}{3m^2-3}$;

g) $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+4\cdot\sqrt{xy}}{x+\sqrt{xy}}$; h) $\frac{2ab+4b-3a-6}{2+2b} : \left(\frac{4b^2+21}{2(1+b)} - 6\right)$.

16. Suprastinkite reiškinį ir apskaičiuokite jo reikšmę, kai duotos kintamųjų reikšmės:

a) $\frac{(a-2)^2}{a^2-5a} \cdot \frac{2a-10}{4-a^2}$, $a = -\frac{1}{2}$;
b) $\frac{x+2}{x^2+3x} - \frac{1+x}{x^2-9}$, $x = 1{,}5$;
c) $\frac{x^2-10b}{x^2-2xb} - \frac{2xb-5x}{(x-2b)x}$, $x = -0{,}25$;
d) $\frac{2a^2b-ab^2+1}{2a-b}$, $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{2}$.

17. Apskaičiuokite:

a) $\left(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}\right)^2 - \left(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}\right)^2$;
b) $\left(7\sqrt{3} + 2\sqrt{5}\right)^2 - \left(7\sqrt{3} - 2\sqrt{5}\right)^2$;
c) $\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$;
d) $\left(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6}\right)\left(1 - \sqrt{6} + \sqrt{5}\right)$.

18. Įrodykite, kad skaičius:

a) $327^3 + 173^3$ dalijasi iš 500;
b) $731^3 - 611^3$ dalijasi iš 120;
c) $2^{12} + 5^9$ yra sudėtinis;
d) $2^{10} + 5^{12}$ yra sudėtinis.

19. Suprastinkite reiškinį:

a) $\frac{4x+5|x|}{5x}$;
b) $\frac{2|x+3|-(x+3)}{3(x+3)}$;
c) $\frac{|x-2|-|x+2|}{x}$;
d) $\frac{6(a^3+27)|a+4|}{(a^2-3a+9)(a^2+7a+12)}$;
e) $\frac{|x-1|(x^2+x+2)(x+1)x}{x^3-1-|x-1|}$;
f) $\frac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}$.

Lygtys, nelygybės ir jų sistemos

20. Išspręskite lygtį:

a) $\frac{1+3x}{1-3x} = \frac{5-2x}{1+2x}$;
b) $\frac{1}{5-y} - 6 = \frac{1-6y}{y}$;
c) $\frac{13}{2x^2+x-21} + \frac{1}{2x+7} = \frac{6}{x^2-9}$;
d) $\frac{12x^2+1}{2x^2-7x+5} - \frac{4}{2x-5} = \frac{3}{1-x}$;
e) $(2x-1)^2 + 5(2x-1) + 6 = 0$;
f) $(5x^2-9x)^2 + 5(5x^2-9x) = 14$;
g) $\frac{x^2+1}{x} - \frac{2x}{x^2+1} + 1 = 0$;
h) $|x-1| + |x-3| = 6$;
i) $x^2 - 6x + |x-4| + 8 = 0$;
j) $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3$.

21. Kada kvadratinė lygtis $2x^2 + 4x - m = 0$
a) turi du skirtingus sprendinius;
b) turi du lygius sprendinius;
c) neturi sprendinių?

22. Ar ekvivalenčios lygtys:
a) $\frac{x-2}{x^2-5x+6} = 1$ ir $x - 2 = x^2 - 5x + 6$;
b) $|x-3| = |1-x|$ ir $(x-3)^2 = (1-x)^2$;
c) $\frac{1}{x(x+1)} + x^4 - \frac{1}{x(x+1)} = x^2$ ir $x^2 = x^4$;
d) $2x - 5 + \frac{1}{x-4} = 4 - x + \frac{1}{x-4}$ ir $2x - 5 = 4 - x$?

23. Su kuriomis m reikšmėmis lygtys
$x^2 + 2(m-3)x + m^2 - 7m + 12 = 0$ ir $x^2 + m^2x + (6-5m)x = 0$
yra ekvivalenčios?

24. Įrodykite, kad lygtis neturi sprendinių:

a) $\sqrt{x+2} = -2$; b) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+3} = 0$; c) $\sqrt{4-x} - \sqrt{x-6} = 2$;
d) $\sqrt{-1-x} = \sqrt[3]{x-5}$; e) $2\sqrt{1-x^2} = x-2$; f) $4 - \sqrt{x-3} = x^2$;
g) $\sqrt{x-3} - \sqrt{x+9} = \sqrt{x-2}$; h) $\sqrt{4x+7} + \sqrt{3-4x+x^2} + 2 = 0$.

25. Ar ekvivalenčios lygtys:

a) $\sqrt{x(x-1)} = \sqrt{6}$ ir $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = \sqrt{6}$;
b) $(1-x)\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$ ir $1 - x = 2$;
c) $\sqrt{x+2} = x$ ir $x + 2 = x^2$;
d) $\sqrt{7x-x^2} = \sqrt{10}$ ir $7x - x^2 = 10$;
e) $\sqrt{7x-10} = x$ ir $7x - 10 = x^2$?

26. Išspręskite iracionaliąją lygtį:

a) $2x - \sqrt{x+1} = x + 5$;
b) $\sqrt{2 + 3\sqrt{x}} = \sqrt{x+4}$;
c) $\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$;
d) $7\sqrt{x} - 2x + 15 = 0$;
e) $x^2 - 2 = 5\sqrt{x^2-2} - 6$;
f) $x^2 - 4x - \sqrt{2x^2 - 8x + 12} = 6$;
g) $\sqrt{x-7} - \frac{6}{\sqrt{x-7}} = 1$;
h) $\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} - \sqrt{x-1} = \frac{x+4}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-1}}$.

27. Ar ekvivalenčios nelygybės:

a) $\frac{-3}{x+4} < -5$ ir $\frac{-3+5(x+4)}{x+4} < 0$; b) $\frac{x-8}{x+1} < 0$ ir $(x-8)(x+1) < 0$;
c) $\frac{x-5}{(x+3)^2} < 0$ ir $x - 5 < 0$; d) $\frac{2}{9-x^2} < \frac{2}{4x^2-4x}$ ir $4x^2 - 4x < 9 - x^2$;
e) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1} < 2$ ir $\sqrt{x^2-1} < 2$;
f) $x - 3 + \frac{1}{x+5} > 6 + \frac{1}{x+5}$ ir $x - 3 > 6$;
g) $x + 1 + \frac{1}{x-8} > 8 + \frac{1}{x-8}$ ir $x + 1 > 8$?

28. Išspręskite nelygybę:

a) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{1}{2} > \frac{3}{x-2}$;
b) $\frac{3x+10}{x+4} < 2$;
c) $|x-3| \leqslant 5$;
d) $\frac{1}{|x-5|} < 2$;
e) $\frac{10}{x-3} + 2 < \frac{2}{x+1}$;
f) $x(x-6) + 15 \leqslant 3|x-1|$;
g) $(x-1)^2 + |x-1| \leqslant 2$;
h) $\frac{|4-x|}{x+6} < 3$;
i) $\frac{|2-x|}{|x-2|} \geqslant 1$.

29. Raskite nelygybės sveikuosius sprendinius:

a) $\frac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-5)} \leqslant 0$;
b) $\frac{2x^2-6x+4}{x^2-2x+1} < \frac{3}{2}$;
c) $x^2 - 9x + 22 < |3x-13|$;
d) $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9} < 0$.

30. Su kuriomis m reikšmėmis nelygybė

$$\frac{x^2+mx-2}{x^2-x+1} > -3$$

teisinga su visais realiaisiais x?

31. Raskite mažiausią x reikšmę, su kuria teisinga nelygybė

$$\frac{x^2-2x+14}{x+8} \geqslant \frac{(\sqrt{5x-3})^2}{5}.$$

32. Išspręskite nelygybių sistemą:

a) $\begin{cases} (x-3)(2-x) \geqslant 0, \\ 4x^2+12x+11 \geqslant 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8-x^2 \geqslant 0, \\ x+2 > 8-x^2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2-3x-10 \geqslant 0, \\ 8-x > 0, \\ x^2-3x-10 < (8-x)^2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-x-2 < 0, \\ x(2-x) \geqslant 0, \\ x^2+2x-3 < 0. \end{cases}$

33. Išspręskite nelygybę:

a) $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leqslant 1$; b) $|x| \geqslant \frac{2x}{|x-3|}$; c) $|5-x| < |2-x| + |2x-7|$;

d) $\frac{4}{|x+3|-1} \geqslant |x+2|$; e) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$.

34. Išspręskite lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą:

a) $\begin{cases} 5(x+y)-2(x-y)=15, \\ 7(x+y)-3(x-y)=21; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2+x^2=79-5xy, \\ x+y=7; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{15}{2x}-\frac{7}{3y}=9, \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=35; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x+1}{y+2}=\frac{y+1}{x+2}, \\ 2x^2-3xy-2y=0; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x\sqrt[3]{x-y}=0, \\ 2y^2+y=21+2xy; \end{cases}$

g) $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{x+y}=6, \\ \sqrt{x+y}-y+x=2; \end{cases}$ h) $\begin{cases} 4|y|+7x=-12, \\ 6|x|+8=|x|y+4y. \end{cases}$

35. Raskite parametro a reikšmes, su kuriomis lygčių sistema

$$\begin{cases} ax^2+y=2, \\ x-y=1 \end{cases}$$

turi vieną sprendinį.

36. Traukinys ketvirtį kelio važiavo 80 km/h, o likusią jo dalį — 60 km/h greičiu. Koks traukinio vidutinis greitis?

37. Rezervuaras užpildytas 20 litrų skysta chemine medžiaga. Norima pagaminti 20 litrų 16% koncentracijos skiedinio. Nupylus į kitą indą tam tikrą kiekį cheminės medžiagos ir įpylus tiek pat vandens tirpalo koncentracija dar buvo per didelė. Pakartojus šią operaciją dar kartą (t. y. nupylus į tą patį indą tokį pat kiekį skiedinio ir vėl įpylus tiek pat vandens) gauta 16% koncentracija. Kokios talpos indą reikėjo turėti nupilti cheminei medžiagai? Apskaičiuokite skiedinio koncentraciją šiame inde.

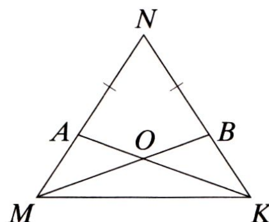
38. Prekės kainą numatoma padidinti $32\frac{1}{4}\%$, tačiau tuomet gerokai sumažėtų paklausa. Todėl nuspręsta kainą po tiek pat procentų didinti du kartus. Po kiek procentų reikia padidinti prekės kainą kiekvieną kartą?

39. Vieno mokytojo atlyginimas pervedamas į banką A, kuris už pinigų išėmimą ima 0,5% mokestį. Kitas mokytojas naudojasi banko B kortele, už kurią teko mokėti 24 Lt. Iš banko B bankomato imant sumą, neviršijančią 800 Lt, mokamas 1 Lt mokestis. Po kelių mėnesių antrasis mokytojas bankui B už paslaugas bus sumokėjęs mažiau negu pirmasis bankui A, jeigu abu mokytojai kas mėnesį pasiima po 800 Lt?

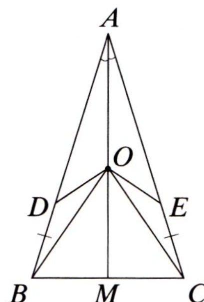
Geometrijos uždaviniai

40. Trikampio ABC pusiaukraštinė AD pratęsta už pagrindo BC atkarpa DE, kuri lygi atkarpai AD, ir taškas E sujungtas su tašku B. Apskaičiuokite kampą ABE, jei $\angle BAC = 78°$.

41. Lygiakraščio trikampio MNK kraštinėse nuo viršūnės N atidėtos lygios atkarpos $AN = BN$. Nubrėžtos atkarpos AK ir BM, kurios susikerta taške O.
Įrodykite, kad:
a) $AK = BM$;
b) $\triangle MOK$ — lygiašonis.



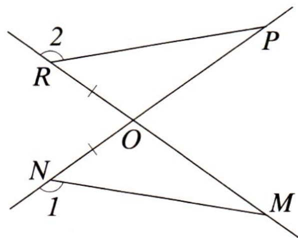
42. Lygiašonio trikampio ABC šoninėse kraštinėse AB ir AC atidėtos lygios atkarpos BD ir CE. Trikampio pusiaukampinės AM taškas O sujungtas su taškais B, C, D ir E.
Įrodykite, kad:
a) $\triangle BMO = \triangle CMO$;
b) $\triangle ADO = \triangle AEO$;
c) $\triangle BDO = \triangle CEO$.



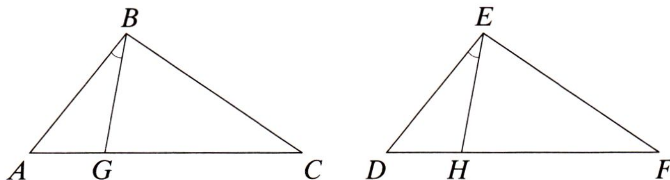
43. Įrodykite, kad lygiašonio trikampio:
a) kampų prie pagrindo pusiaukampinės yra lygios;
b) aukštinės, nubrėžtos į šonines kraštines, yra lygios;
c) pusiaukraštinės, nubrėžtos į šonines kraštines, yra lygios.

44. Įrodykite, kad trikampis yra lygiašonis, jeigu:
a) dvi jo aukštinės yra lygios;
b) dvi jo pusiaukraštinės yra lygios;
c) dvi jo pusiaukampinės yra lygios.

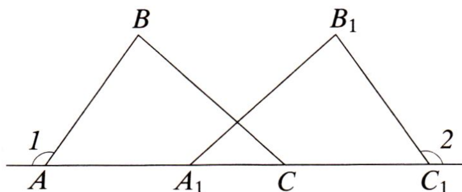
45. Tiesės MR ir PN susikerta taške O. $ON = OR$ ir $\angle 1 = \angle 2$.
Įrodykite, kad:
a) $MN = PR$;
b) $NR \parallel MP$.



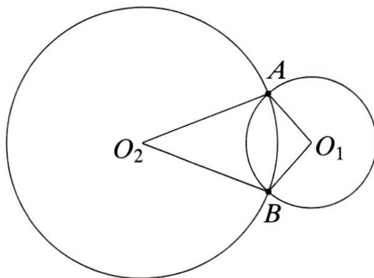
46. Trikampiai ABC ir DEF yra lygūs. Atkarpos BG ir EH su kraštinėmis AB ir ED sudaro lygius kampus ABG ir DEH. Įrodykite, kad $GC = HF$.



47. Duota: $AB = B_1C_1$,
$BC = B_1A_1$,
$AA_1 = CC_1$.
Įrodyti: $\angle 1 = \angle 2$.



48. Du apskritimai, kurių centrai yra taškai O_1 ir O_2, susikerta taškuose A ir B.
Įrodykite, kad:
a) $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2$;
b) $AB \perp O_1O_2$.



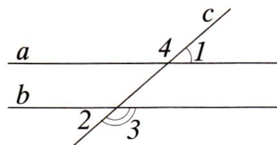
49. Lygiašonio trikampio ABC šoninė kraštinė du kartus ilgesnė už jo pagrindą BC. Iš kraštinės AC vidurio taško M nubrėžtas statmuo iki susikirtimo su kraštine AB taške N. Taškas N sujungtas su tašku C. Trikampio BCN perimetras lygus 18 cm. Apskaičiuokite trikampio ABC perimetrą.

50. Įrodykite, kad lygiašonės trapecijos įstrižainės yra lygios.

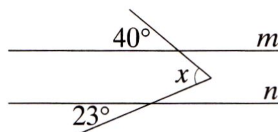
51. Dvi lygiagrečias tieses a ir b kerta tiesė l. Vienas iš gautųjų kampų lygus 37°. Raskite kitus septynis kampus.

52. Raskite visus kampus, gautus dvi lygiagrečias tieses a ir b kertant kirstine l, jei vienas iš kampų 50° didesnis už kitą.

53. Duota: $\angle 3 : \angle 2 = 3 : 2$,
$\angle 4 - \angle 1 = 36^\circ$.
Įrodyti: $a \parallel b$.

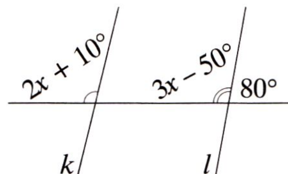


54. Tiesės m ir n lygiagrečios. Apskaičiuokite kampą x.



55. Dvi lygiagrečias tieses kerta trečioji tiesė. Įrodykite, kad dviejų vidaus vienašalių kampų pusiaukampinės sudaro statųjį kampą.

56. Ar tiesės k ir l yra lygiagrečios?



Įvairūs uždaviniai

57. Moksleivių grupė atėjo į kavinę, kurioje yra tik triviečiai staliukai, o vietų lygiai tiek — kiek moksleivių. Jeigu merginos prie staliukų susėstų po 2, tai prie 3 staliukų sėdėtų vien vaikinai. Jeigu vaikinai susėstų po 2, tai prie 2 staliukų sėdėtų vien tik merginos. Kiek merginų buvo grupėje?

58. Pirmasis darbininkas vienai detalei pagaminti sugaišta 6 minutėmis mažiau negu antrasis. Todėl per 7 valandas pirmasis pagamina 8 detalėmis daugiau negu antrasis. Kiek detalių pagamina kiekvienas darbininkas per 7 valandas?

59. Jeigu dviženklį skaičių n padalytume iš jo skaitmenų sandaugos, dalmuo būtų lygus 1, o liekana 16. Jeigu prie skaičiaus n skaitmenų skirtumo kvadrato pridėtume skaičiaus n skaitmenų sandaugą, gautume patį skaičių n. Koks tai skaičius?

60. Šachmatų turnyro, kuriame dalyvavo 2 mergaitės ir keletas berniukų, dalyviai susitiko tarpusavyje po vieną kartą. Už laimėtą partiją buvo skiriamas 1 taškas, už lygiąsias 0,5 taško, o už pralaimėtą partiją taškų nebuvo skiriama. Abi mergaitės kartu surinko 8 taškus, o kiekvienas berniukas surinko po vienodą taškų, neviršijantį 10, skaičių. Kiek berniukų dalyvavo turnyre?

61. Su kuriomis k reikšmėmis lygties $(1+k)x^2 - 3kx + 4k = 0$ abu sprendiniai yra didesni už 1?

62. Raskite p reikšmę, su kuria lygties $x^2 - 4x + p = 0$ sprendinių kubų suma lygi 16.

63. Išspręskite nelygybę

$$\sqrt{(x-6)x+9} + |x-5| < 4.$$

64. Iš Vilniaus ir Kauno vienas prieš kitą išvyko motociklininkas ir dviratininkas. Važiuodami pastoviais greičiais jie susitiko po 45 min. Per kiek laiko motociklininkas nuvyko į Kauną, jeigu jis kelionėje užtruko dviem valandomis mažiau negu dviratininkas nuvykdamas iš Kauno į Vilnių?

65. Garvežio rato apskritimo ilgis 3,2 m didesnis už vagono rato apskritimo ilgį. Kiek kilometrų nuvažiavo traukinys, jei vagono ratas apsisuko 2100 kartų, o garvežio ratas 900 kartų?

66. Išspręskite lygtį

$$\frac{2(x-7)}{\sqrt{3x-8}+\sqrt{x+6}} + \sqrt{2(x-1)} = \frac{3(3-x)}{1-\sqrt{3x-8}}.$$

67. Išspręskite nelygybę

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-5} \geqslant \sqrt{5-2x}.$$

68. Įrodykite, kad su bet kuriais $x, y \in \boldsymbol{R}$ teisinga nelygybė

$$x^2 + y^2 - xy - x - y + 1 \geqslant 0.$$

69. Įrodykite, kad su bet kuriais $x \in \boldsymbol{R}$ teisinga nelygybė

$$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0.$$

70. Kiek sveikųjų sprendinių turi lygtis

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}?$$

71. Juvelyras turi du skirtingus aukso ir sidabro lydinius. Pirmojo lydinio aukso ir sidabro masių santykis yra 1 : 2, o antrojo — 2 : 3. Juvelyrui prireikė 19 g lydinio, kurio aukso ir sidabro masių santykis būtų 7 : 12. Kiek gramų jis turi paimti pirmojo ir antrojo lydinio, kad sulydęs juos gautų 19 g norimos sudėties lydinio?

72. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} (x^2 + y^2)(x - y) = 447, \\ xy(x - y) = 210; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 19, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$

Sudėti ir dauginti skaičius galime ir be skaičiuoklio. O jeigu tektų be skaičiuoklio traukti kvadratinę ar kubinę šaknį? Tada tikrai suprastume, koks tai sunkus uždavinys. Babiloniečiai, pavyzdžiui, traukdami šaknis naudojosi skaičių kvadratų ir kubų lentelėmis. Graikai apytikslę kvadratinės šaknies iš skaičiaus reikšmę dažnai skaičiuodavo „artėjimo“ būdu.

Tarkime, pavyzdžiui, kad reikia rasti apytikslę $\sqrt{3}$ reikšmę. Jeigu skaičius $a > 0$ yra $\sqrt{3}$ artinys su trūkumu, t. y. $a < \sqrt{3}$, tai $\sqrt{3} < \frac{3}{a}$ (jei būtų $a > \sqrt{3}$, tai $\frac{3}{a} < \sqrt{3}$). Taigi skaičius $\frac{3}{a}$ yra $\sqrt{3}$ artinys su perteklium: $a < \sqrt{3} < \frac{3}{a}$. Imdami aritmetinį vidurkį $\frac{1}{2}\left(a + \frac{3}{a}\right)$ gausime naują $\sqrt{3}$ artinį ir galėsime žengti naują „artėjimo“ prie $\sqrt{3}$ žingsnį.

Atlikite keletą žingsnių pradėję su $a = 1$ ir raskite keletą $\sqrt{3}$ artinių.

II Plokštumos vektoriai



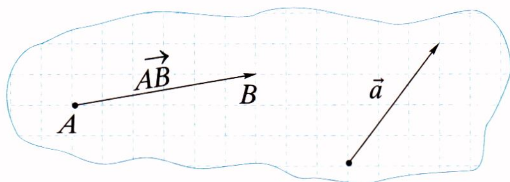
6. Vektoriai ir jų veiksmai

6.1. Vektoriaus sąvoka

Tokie dydžiai kaip ilgis, plotas, tūris, masė, tankis, temperatūra, varža, darbas nusakomi vien jų skaitinėmis reikšmėmis. Tačiau jėgai, greičiui, pagreičiui nusakyti, be skaitinės reikšmės, reikia nurodyti ir kryptį. Šiems dydžiams vaizduoti brėžiniuose naudojamos atkarpos su rodyklėmis. Atkarpos ilgis parodo dydžio skaitinę reikšmę, o rodyklė — jo kryptį. Tokias kryptines atkarpas vadinsime *vektoriais.**

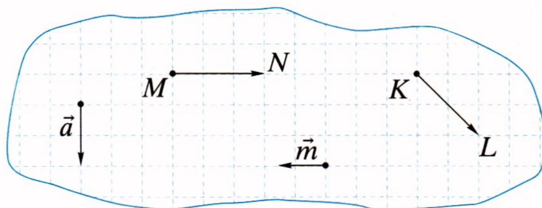
APIBRĖŽIMAS
Vektoriumi vadiname atkarpą, kurioje nurodyta kryptis. Jeigu atkarpoje AB nurodyta kryptis iš A į B, tai A vadiname vektoriaus pradžios tašku, B — vektoriaus galo tašku, o patį vektorių žymime $\overrightarrow{AB}$.
Vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgiu vadiname atkarpos AB ilgį.

Taigi su ta pačia atkarpa AB galime susieti du vektorius: $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BA}$. Dažnai vektoriai žymimi ir viena mažąja raide su vektoriaus ženklu.



Žymenis skaitome taip: $\overrightarrow{AB}$ — vektorius AB; $\vec{a}$ — vektorius a.

Vektorių ilgius žymėsime: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$. Pavyzdžiui, brėžinyje pavaizduotų vektorių ilgiai yra tokie: $|\overrightarrow{MN}| = 3$; $|\overrightarrow{KL}| = 2\sqrt{2}$; $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{m}| = 1{,}5$ (laikome, kad langelio kraštinės ilgis lygus 1).



*Vektorius — žodis, pasiskolintas iš lotynų kalbos. *Vecto* lotyniškai reiškia nešioti, gabenti, o *vector* — nešėjas, vežėjas.

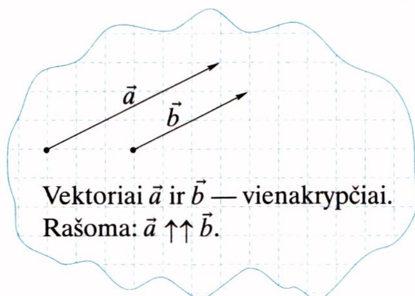
Kai taškas A sutampa su B, tai AB reiškia tiesiog vieną tašką. Taško krypties, žinoma, negalime apibrėžti. Tačiau patogu ir tokią tašku virtusią atkarpą vadinti vektoriumi su neapibrėžta kryptimi.

APIBRĖŽIMAS
Bet kurį plokštumos tašką vadiname nuliniu vektoriumi. Nulinio vektoriaus pradžios ir galo taškai sutampa, kryptis neapibrėžta, o ilgis lygus nuliui.

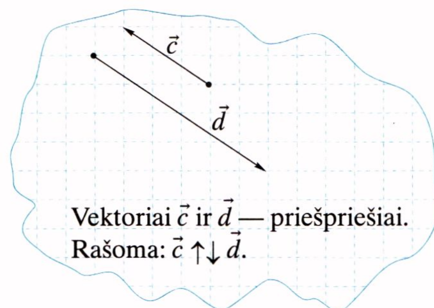
Kai nurodome nulinio vektoriaus pradžios (kartu ir galo) tašką, nulinį vektorių žymime $\overrightarrow{AA}$; kai nenurodome — tiesiog $\vec{0}$.

APIBRĖŽIMAS
Vektoriai, esantys vienoje tiesėje arba lygiagrečiose tiesėse, vadinami kolineariaisiais.

Kolinearieji vektoriai gali būti nukreipti į vieną pusę (vienakrypčiai) arba į priešingas puses (priešpriešiai).

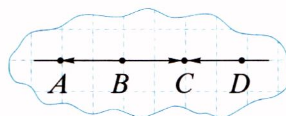


Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ — vienakrypčiai.
Rašoma: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.



Vektoriai $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ — priešpriešiai.
Rašoma: $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$.

1 užduotis. Tiesėje pažymėti taškai A, B, C, D. Kiek skirtingų vektorių galima sudaryti, jei bet kuris iš pažymėtų taškų gali būti vektoriaus pradžios tašku, o galo — tik taškai A ir C? Užrašykite šiuos vektorius ir suskirstykite juos į dvi vienakrypčių vektorių grupes.

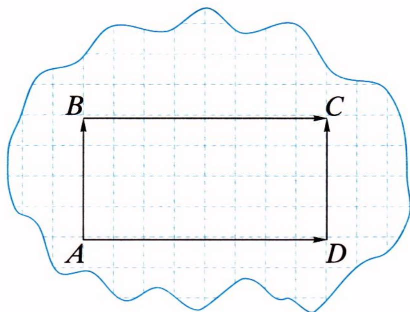


Tegu $\overrightarrow{AA}$ yra nulinis, o $\overrightarrow{BC}$ koks nors nenulinis vektorius. Per tašką A galima nubrėžti tiesę, lygiagrečią tiesei, kurioje yra $\overrightarrow{BC}$. Taigi vektoriai $\overrightarrow{AA}$ ir $\overrightarrow{BC}$ yra lygiagrečiose tiesėse — jie kolinearūs. Įsitikinome, kad nulinis vektorius yra kolinearus kiekvienam kitam vektoriui.

Jeigu dviejų atkarpų ilgiai lygūs, tai ir atkarpos lygios. Tačiau vektorius nusakomas ne tik ilgiu, bet ir kryptimi. Todėl lygiais vadinsime vektorius, turinčius ne tik vienodus ilgius, bet ir vienodas kryptis.

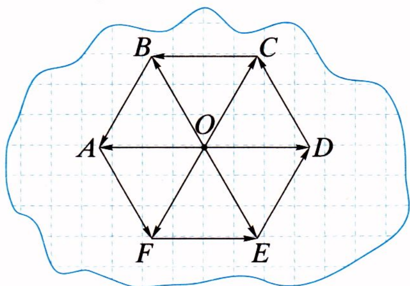
APIBRĖŽIMAS
Vienakrypčiai vektoriai, kurių ilgiai lygūs, vadinami lygiais.
Visus nulinius vektorius taip pat laikysime lygiais.

Panagrinėkime stačiakampio $ABCD$ kraštinėse pavaizduotus vektorius.

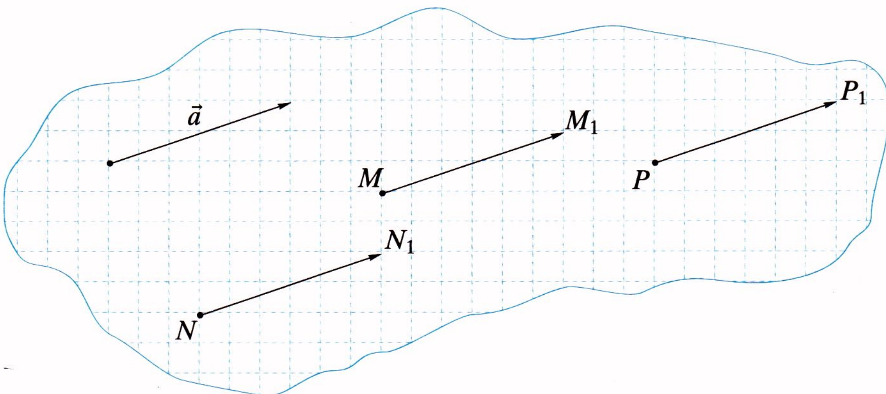


Kadangi $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$ ir $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$, tai vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{DC}$ yra lygūs (rašome $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$). Taip pat lygūs ir dar du pavaizduoti vektoriai: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

2 užduotis. Taisyklingojo šešiakampio $ABCDEF$ kraštinėse ir įstrižainėse pažymėta 12 vektorių. Kiek daugiausia vektorių galima parinkti iš pažymėtųjų, kad bet kurie du iš jų būtų nelygūs?



Tegu $\vec{a}$ yra koks nors vektorius, o M — plokštumos taškas. Visada galime nubrėžti vektorių, lygų $\vec{a}$, kurio pradžios taškas yra M. Nubrėžę sakome, kad atidėjome vektorių $\vec{a}$ iš taško M.



Brėžinyje $\vec{a} = \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{NN_1} = \overrightarrow{PP_1}$; kitaip tariant, tas pats vektorius $\vec{a}$ atidėtas iš taškų M, N, P.

Pratimai ir uždaviniai

1. Trikampio ABC kraštinėse pažymėkite visus nenulinius vektorius, kurių pradžios ir galo taškai yra trikampio viršūnės. Užrašykite šiuos vektorius.

2. Stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90^\circ$) statinių ilgiai: $AC = 3\,\text{cm}$, $BC = 4\,\text{cm}$. Raskite vektorių $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$ ilgius.

3. Kiekvienam iš užrašytųjų teiginių suformuluokite atvirkštinį:
a) jeigu du vektoriai lygūs, tai ir kolinearūs;
b) jeigu du vektoriai vienakrypčiai, tai ir lygūs;
c) jeigu du vektoriai lygūs, tai ir priešpriešiai;
d) jeigu vienas iš dviejų vektorių nulinis, tai vektoriai yra kolinearūs;
e) jeigu vienas iš dviejų vektorių nulinis, tai vektoriai yra vienakrypčiai.
Kurie teiginiai yra teisingi, kurie klaidingi? Paaiškinkite, kodėl.

4. Pažymėkite visus nenulinius vektorius, kurių pradžios ir galo taškai yra stačiakampio $ABCD$ viršūnės. Užrašykite:
a) kolinearių vektorių poras;
b) vienakrypčių vektorių poras;
c) priešpriešių vektorių poras;
d) lygių vektorių poras.

5. Stačiakampio $ABCD$ kraštinių ilgiai: $AB = 9\,\text{cm}$, $BC = 18\,\text{cm}$. Kraštinėje BC pažymėtas taškas E taip, kad $BE : EC = 2 : 1$. Raskite vektorių $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE}$ ilgius.

6. Nubraižykite trikampį ABC, pažymėkite vektorių $\vec{m} = \overrightarrow{AB}$. Iš taško C atidėkite vektorių $\vec{n}$:
a) $\vec{n} = \vec{m}$;
b) $|\vec{n}| = |\vec{m}|$, $\vec{n} \neq \vec{m}$;
c) $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{m}$, $|\vec{n}| = \frac{1}{2}|\vec{m}|$;
d) $\vec{n} \uparrow\downarrow \vec{m}$, $|\vec{n}| < \frac{1}{2}|\vec{m}|$.
Kiek tokių vektorių kiekvienu atveju galima atidėti?

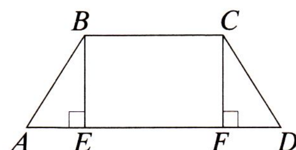
7. Tiesėje pažymėti trys taškai K, M, N. Taškas K yra tarp taškų M ir N. Kurie iš vektorių $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{KM}$ yra vienakrypčiai ir kurie — priešpriešiai?

8. Plokštumoje duoti trys skirtingi taškai A, B ir C, nesantys vienoje tiesėje. Kiek skirtingų vektorių galima sudaryti imant šiuos taškus vektorių pradžios ir galo taškais?

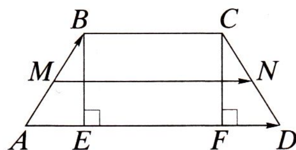
9. Duoti trys skirtingi plokštumos taškai A, B ir C. Įrodykite, kad $|\overrightarrow{AC}| \leqslant |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$. Kada galioja lygybė?

10. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O. Nagrinėkime nenulinius vektorius, kurių pradžios ir galo taškai priklauso aibei $\{A, B, C, D, O\}$. Kiekvienam tokiam vektoriui suraskite kitą jam lygų vektorių ir užrašykite atitinkamą lygybę.

11. $ABCD$ — lygiašonė trapecija, BE ir CF — trapecijos aukštinės. Brėžinyje pažymėkite ir užrašykite:
a) kolinearių, bet nelygių vektorių porą;
b) vienakrypčių vektorių porą;
c) priešpriešių vektorių porą;
d) lygių vektorių porą.

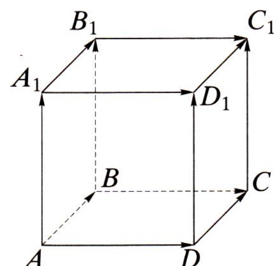


12. Duota: $ABCD$ — trapecija,
$AB = CD$, $BE \perp AD$, $CF \perp AD$,
MN — trapecijos vidurinė linija,
$BC = 12\,\text{cm}$, $AD = 20{,}4\,\text{cm}$, $BE = 5{,}6\,\text{cm}$.
Apskaičiuoti: $|\overrightarrow{MN}|$, $|\overrightarrow{FD}|$, $|\overrightarrow{AB}|$.



13. Plokštumoje pažymėti taškai M, N, K, L tokie, kad $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KL}$. Suformuluokite teisingus teiginius apie vektorius:
a) $\overrightarrow{MK}$ ir $\overrightarrow{NL}$; b) $\overrightarrow{MK}$ ir $\overrightarrow{LN}$.
Išnagrinėkite du atvejus: kai M, K, N, L nėra (yra) vienoje tiesėje.

14. Vektorius galima nagrinėti ne tik plokštumoje, bet ir erdvėje. Vienakrypčių erdvės vektorių ir lygių erdvės vektorių sąvokos apibrėžiamos taip pat kaip plokštumos vektoriams.
Kiekvienoje kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunoje pavaizduotas vektorius.
Užrašykite:
a) vienakrypčius vektorius;
b) lygius vektorius.



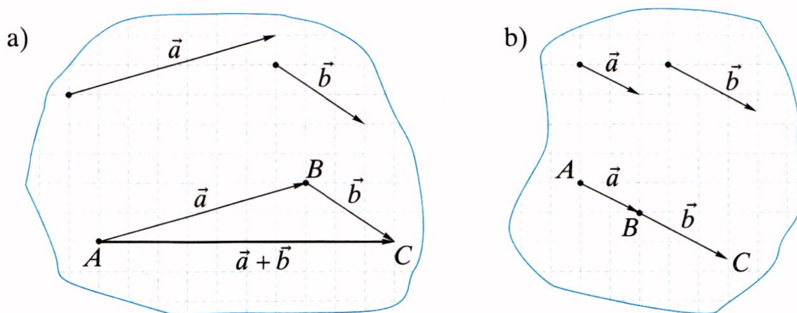
Vektoriais vaizduojame jėgą, greitį, pagreitį ir kitus fizikos dydžius. Atrodo, kad vektoriai — kone vienintelis būdas šiems dydžiams reikšti.

Tačiau vektoriai atsirado ne taip jau seniai. Pirmieji juos pradėjo naudoti du XIX amžiaus matematikai: vokietis S. Grasmanas ir airis R. Hamiltonas. Taigi didysis Niutonas apie jokius vektorius nebuvo nė girdėjęs!

Užtat dabar vektorių pilna kiekviename fizikos vadovėlyje.

6.2. Vektorių sudėtis

Mokysimės sudėti du vektorius. Jei $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra du vektoriai, tai $\vec{b}$ galime atidėti taip, kad jo pradžios taškas sutaptų su $\vec{a}$ galu. Pažymėkime $\vec{a}$ pradžios tašką A, $\vec{a}$ galo (ir $\vec{b}$ pradžios) tašką — B, ir $\vec{b}$ galo tašką — C.



Jei $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearūs, tai A, B, C yra trikampio viršūnės (a pav.), jei kolinearūs — tai šie taškai yra vienoje tiesėje (b pav.).

APIBRĖŽIMAS

Jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ atidėti taip, kad $\vec{b}$ pradžios taškas sutampa su $\vec{a}$ galo tašku, tai vektorių, kurio pradžios taškas sutampa su $\vec{a}$ pradžios tašku, o galo taškas — su $\vec{b}$ galo tašku, vadiname vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ suma ir žymime $\vec{a}+\vec{b}$.

Taigi $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, arba $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

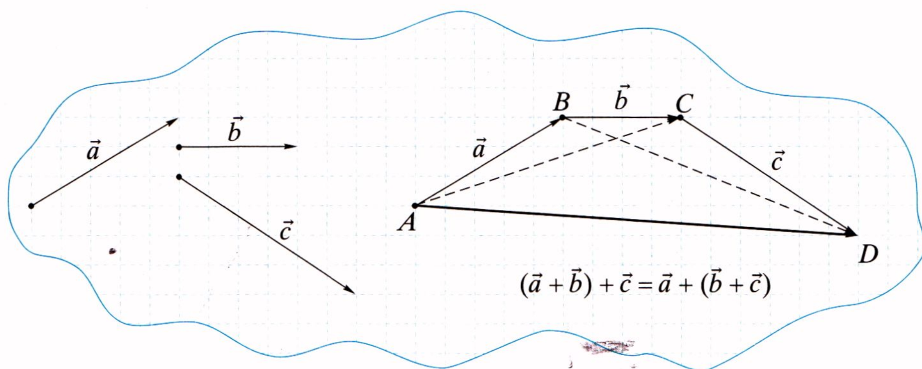
1 užduotis. Įsitikinkite, kad bet kokiems vektoriams $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra teisinga nelygybė $|\vec{a}+\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|+|\vec{b}|$. Kada ši nelygybė virsta lygybe?

Prie vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ pridėję nulinį vektorių gausime:

$$\overrightarrow{AB}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}.$$

Taigi prie vektoriaus pridėjus nulinį vektorių vektorius nepasikeičia.

Tegu dabar $\vec{a}, \vec{b}$ ir $\vec{c}$ yra trys plokštumos vektoriai. Atidėkime $\vec{b}$ taip, kad jo pradžios taškas sutaptų su $\vec{a}$ galo tašku, o $\vec{c}$ pradžia — su $\vec{b}$ galo tašku. Pažymėkime atitinkamus vektorių pradžios ir galo taškus A, B, C, D.

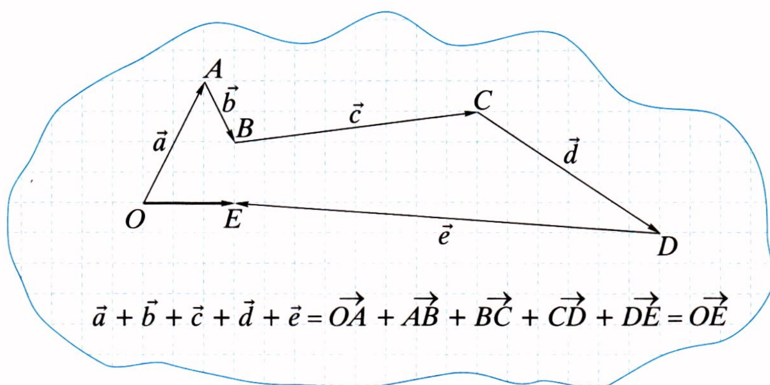


Iš brėžinio matome, kad $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \vec{c}$, taigi $\overrightarrow{AD} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$. Kita vertus, $\overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \overrightarrow{BD}$, taigi $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. Tą patį vektorių užrašėme dviem būdais, todėl

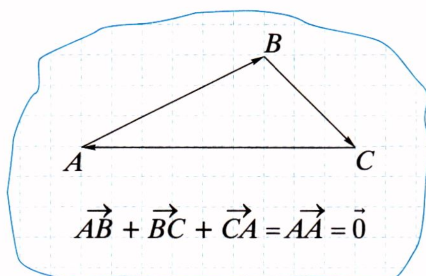
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Ši savybė teisinga bet kokiems trims vektoriams. Ji vadinama *jungimo* savybe. Taigi panašiai kaip sudedant tris skaičius sudedant tris vektorius rezultatas nepriklauso nuo to, ar sudedame $\vec{a}$ ir $\vec{b} + \vec{c}$, ar $\vec{a} + \vec{b}$ ir $\vec{c}$. Sudedant tris vektorius $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ pakanka atidėti $\vec{b}$ nuo $\vec{a}$ galo, $\vec{c}$ nuo $\vec{b}$ galo ir sujungti $\vec{a}$ pradžios ir $\vec{c}$ galo taškus vektoriumi. Panašiai sudedame ir kai vektorių yra daugiau.

Sudėdami kelis vektorius nuo pirmojo vektoriaus galo atidedame antrąjį vektorių, nuo antrojo vektoriaus galo atidedame trečiąjį vektorių ir t. t. Vektorius, jungiantis pirmojo vektoriaus pradžią su paskutiniojo vektoriaus galu, yra šių vektorių suma.

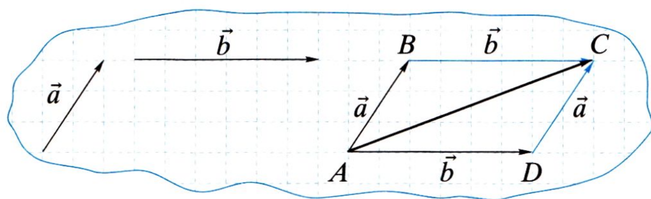


Kai vektorių sumą randame šiuo būdu, paprastai sakome, kad pritaikėme *daugiakampio* taisyklę, kai vektorių tik du — *trikampio* taisyklę.



Jei pirmojo vektoriaus pradžia sutampa su paskutiniojo vektoriaus pabaiga, tai tų vektorių suma yra nulinis vektorius.

Du nekolinearius vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ galima sudėti naudojantis kitokiu brėžiniu. Atidėkime abu vektorius iš to paties taško, papildykime brėžinį iki lygiagretainio ir pažymėkime lygiagretainio viršūnes A, B, C, D.



Iš brėžinio matome: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Taigi $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Įsitikinome, kad dviejų nekolinearių vektorių sumą galime surasti atidėję abu vektorius iš to paties taško ir nubrėžę lygiagretainio įstrižainę. Kai vektorius sudedame naudodamiesi tokiu brėžiniu, sakome, kad taikome *lygiagretainio* taisyklę.

Iš brėžinio matyti, kad $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$ ir $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}$. Taigi nekolineariems vektoriams teisingas toks teiginys:

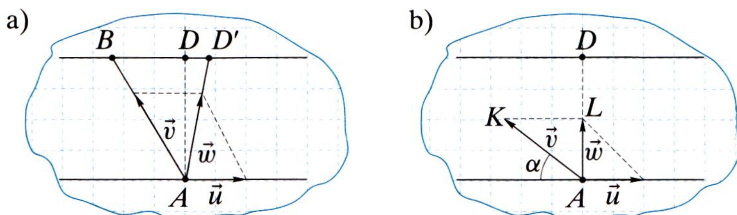
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

2 užduotis. Įsitikinkite, kad ši lygybė teisinga ir kolineariems vektoriams.

Vektoriai dažnai taikomi sprendžiant įvairius judėjimo uždavinius.

1 PAVYZDYS. Upės srovės greitis 5 km/h, motorinės valties greitis stovinčiame vandenyje — 13 km/h. Kokia kryptimi valtis turi išplaukti iš taško A, kad nuplauktų tiesiai į priešais A esantį kito upės kranto tašką D? Per kiek laiko valtis pasieks tašką D, jei upės plotis lygus 100 m?

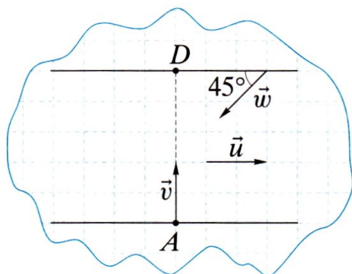
Sprendimas. Jeigu išplaukdami iš taško A nustatytume valties kryptį link taško B ir nesukiotume valties vairo, tai valtis vandens atžvilgiu plauktų greičiu $\vec{v}$, o kranto atžvilgiu — greičiu $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$, čia $\vec{u}$ yra upės srovės greitis. Taigi valtis pasiektų kito kranto tašką D' (žr. a) pav.).



Kad pasiektume tiesiai priešais A esantį tašką D, greitis $\vec{w}$ turi būti tiesėje, jungiančioje A ir D, taigi tinka brėžinys b). Remdamiesi brėžiniu b) iš $\triangle AKL$ gauname: $AK^2 = KL^2 + AL^2$ arba $13^2 = 5^2 + AL^2$, $AL = 12$. Taigi plaukti reikia kryptimi, kuri su krantu sudaro kampą α, $\sin\alpha = \frac{AL}{AK} = \frac{12}{13}$. Tada valties greitis kranto atžvilgiu bus nukreiptas tiesiai į tašką D, $|\vec{w}| = 12\,\text{km/h} = \frac{10}{3}\,\text{m/s}$. Valtis iki taško D plauks $t = \frac{100}{(10/3)}\,\text{s} = 30\,\text{s}$.

Išspręskime dar vieną uždavinį apie per upę plaukiančią valtį. Šįkart jai plaukti trukdo ne tik upės srovė, bet ir priešpriešiais pučiantis vėjas.

2 PAVYZDYS. Iš taško A, esančio viename 100 m pločio upės krante, statmenai krantui išplaukė valtis. Jeigu upės vanduo netekėtų ir nepūstų vėjas, tai valtis kranto atžvilgiu plauktų greičiu $\vec{v}$ ir pasiektų priešais esantį tašką per 10 sekundžių. Tačiau upės vanduo teka greičiu $\vec{u}$ ir priešpriešiais pučia vėjas, kurio greitis $\vec{w}$ sudaro su krantu 45° kampą.



Kiek laiko truks valties kelionė per upę ir kuriame taške išsilaipins keleiviai, jei $|\vec{u}| = |\vec{w}| = |\vec{v}|$?

Sprendimas. Iš pradžių suraskime valties greitį (metrais per sekundę) stovinčiame vandenyje, t. y. vektoriaus $\vec{v}$ ilgį:

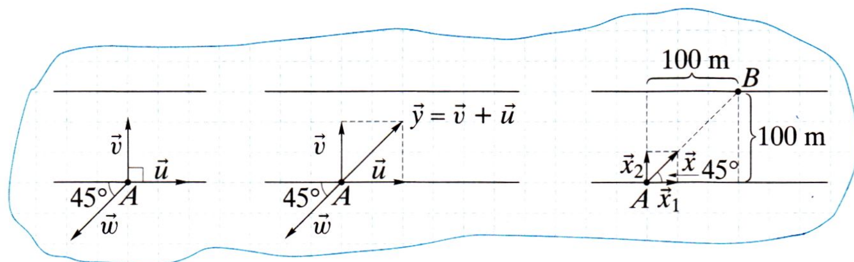
$$|\vec{v}| = \frac{100}{10} = 10.$$

Kadangi $|\vec{v}| = |\vec{u}| = |\vec{w}|$, tai ir $|\vec{u}| = |\vec{w}| = 10$.

Jei nepūstų vėjas, tai valtis plauktų kranto atžvilgiu greičiu $\vec{v}+\vec{u}$. Tačiau priešpriešiais greičiu $\vec{w}$ pučia vėjas, todėl valties greitis kranto atžvilgiu (su sąlyga, kad valties trinties į vandenį galima nepaisyti) bus

$$\vec{x} = \vec{v} + \vec{u} + \vec{w}.$$

Atidėkime vektorius $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{w}$ iš vieno taško.



Sudėję vektorius $\vec{v}$ ir $\vec{u}$ pagal lygiagretainio taisyklę gausime vektorių $\vec{y} = \vec{v} + \vec{u}$, priešpriešį vektoriui $\vec{w}$. Šio vektoriaus ilgis $|\vec{y}| = \sqrt{2}|\vec{v}| = 10\sqrt{2}$. Taigi vektorius $\vec{x} = \vec{v} + \vec{u} + \vec{w}$ yra vienakryptis su $\vec{y} = \vec{v} + \vec{u}$, t. y. su krantu sudaro 45° kampą. Jo ilgis $|\vec{x}| = |\vec{y}| - |\vec{w}| = 10(\sqrt{2} - 1)$.

Užrašykime valties greičio kranto atžvilgiu vektorių $\vec{x}$ dviejų vektorių suma:

$$\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2},$$

čia $\vec{x_1}$ yra lygiagretus, o $\vec{x_2}$ — statmenas kranto tiesei vektorius, $|\vec{x_1}| = |\vec{x_2}| = \frac{\sqrt{2}}{2}|\vec{x}| = 5\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 10 - 5\sqrt{2}$. Taigi per 1 sekundę valtis pasislenka $(10 - 5\sqrt{2})$ m $\approx$ $\approx$ 2,9 m lygiagrečiai krantui ir tiek pat statmenai. Valties kelionė pasibaigs, kai statmenai krantui ji nuplauks 100 m, taigi kelionė truks

$$t = \frac{100}{|\vec{x_2}|} = \frac{100}{10 - 5\sqrt{2}} = 2(10 + 5\sqrt{2}) \approx 34$$

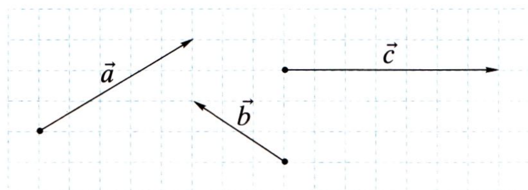
sekundes, o keleiviai išsilaipins priešingo kranto taške B (žr. brėž.).

3 užduotis. Nustatykite, kaip pasikeistų kelionės laikas, jei vėjo greitis $\vec{w}$ su kranto tiese sudarytų ne 45°, bet mažesnį kampą?

Pratimai ir uždaviniai

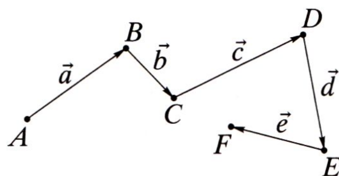
15. Duoti trys skirtingi taškai A, B ir C. Raskite vektorių sumą:
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$; c) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$; d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$.

16. Duoti vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
Nubrėžkite:
a) $\vec{a} + \vec{b}$; b) $\vec{b} + \vec{c}$;
c) $\vec{a} + \vec{c}$; d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

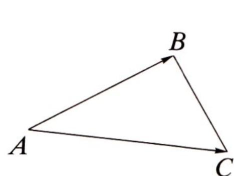


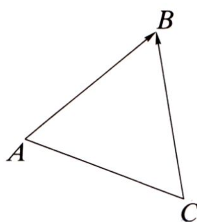
17. $ABCD$ — stačiakampis. Ar teisinga lygybė $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$?

18. Nubrėžta laužtė $ABCDEF$, kurios grandys pažymėtos vektoriais $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$. Raskite $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$.



19. Raskite vektorius $\vec{x}$ ir $\vec{y}$, tenkinančius lygybes:
a) $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AB} + \vec{y} = \overrightarrow{CB}$.



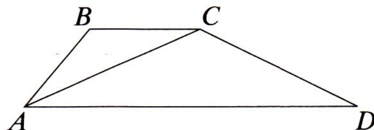


20. Kvadrato $ABCD$ įstrižainės kertasi taške O. Išreikškite vektorių $\overrightarrow{BC}$ vektoriais $\overrightarrow{AO}$ ir $\overrightarrow{BO}$.

21. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške M. Pažymėkime $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ išreikškite vektorių:

a) $\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC}$; c) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}$.

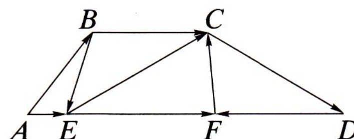
22. Trapecijos $ABCD$ kraštinėje AD pažymėkite tokį tašką X, kad būtų teisinga lygybė $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AX}$.



23. Pažymėkite plokštumoje skirtingus taškus K, L, M, N ir raskite vektorių sumą:

a) $\overrightarrow{NL} + \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KM}$; b) $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LN} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{NL}$.

24. Surašykite vektorius, kurie yra dviejų brėžinyje pažymėtų vektorių suma.



Pavyzdys. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$.

---

25. Taškai A, B ir C vienetinį apskritimą su centru O dalija į tris lygias dalis. Sudėkite vektorius:

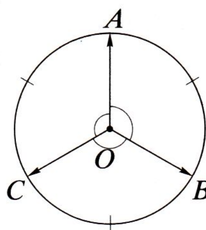
a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$;

b) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$;

c) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$;

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

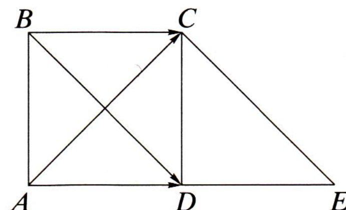
Raskite gautųjų vektorių ilgius.



26. Jeigu nebūtų vėjo, tai parašiutininkas leistųsi vertikaliai žemyn 3 m/s greičiu. Tačiau pučia vėjas, kurio greitis 2 m/s. Brėžinyje pavaizduokite parašiutininko leidimosi greičio vektorių, raskite šio vektoriaus ilgį.

27. Duota: $ABCD$ — kvadratas,
$BCED$ — lygiagretainis.

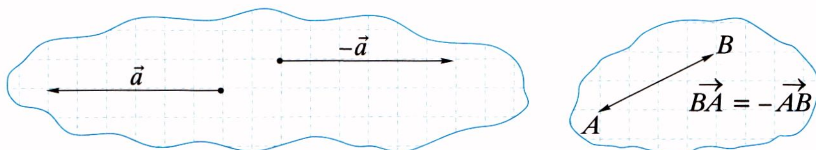
Įrodykite: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.



6.3. Vektorių atimtis

Nubraižykime du vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, kurių kryptys yra priešingos, o ilgiai lygūs. Tokius vektorius vadinsime priešingaisiais vektoriais.

APIBRĖŽIMAS
Nenulinio vektoriaus $\vec{a}$ priešinguoju vektoriumi vadiname to paties ilgio priešpriešį vektorių. Vektoriui $\vec{a}$ priešingą vektorių žymime $-\vec{a}$.

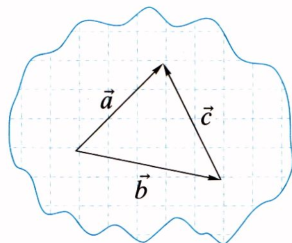


Taigi $\overrightarrow{BA}$ yra vektoriui $\overrightarrow{AB}$ priešingas vektorius. Jį galima žymėti ir taip: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. Nulinio vektoriaus priešinguoju vektoriumi vadiname tą patį nulinį vektorių.

Sudėkime priešinguosius vektorius $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Priešingųjų vektorių suma yra nulinis vektorius, t. y. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

APIBRĖŽIMAS
Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skirtumu vadiname tokį vektorių $\vec{c}$, kurį sudėję su vektoriumi $\vec{b}$ gauname vektorių $\vec{a}$. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skirtumą žymime $\vec{a} - \vec{b}$.



Vektorių $\vec{a}, \vec{b}$ skirtumą lengva rasti atidėjus abu vektorius iš to paties taško. Pažymėkime $\vec{c}$ vektorių, kurio pradžios taškas sutampa su $\vec{b}$ galo tašku, o galo taškas — su $\vec{a}$ galo tašku.
Brėžinyje matome, kad $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, tačiau tai reiškia, kad $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Jeigu du vektoriai yra atidėti iš vieno taško, tai vektorius, jungiantis antrojo vektoriaus galo tašką su pirmojo galo tašku, lygus pirmojo ir antrojo vektorių skirtumui.

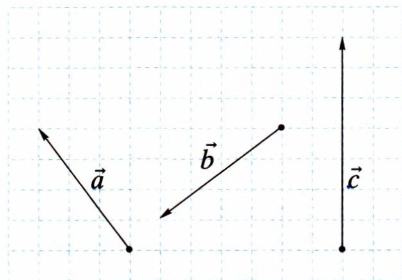
Paprastai sakome, kad vektorių skirtumą gauname iš vieno vektoriaus atėmę kitą. Jei $\vec{c}$ yra vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skirtumas, tai $\vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$. Pridėję prie abiejų šios lygybės pusių po vektorių $-\vec{b}$ gausime $\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c} + \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{c} + \vec{0} = \vec{c}$. Taigi vektorių skirtumą galime išreikšti vektorių suma: $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ arba $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Todėl iš vieno vektoriaus atimti kitą reiškia prie pirmojo vektoriaus pridėti vektorių, priešingą antrajam.

Pertvarkant vektorines lygybes galima vektorius kelti iš vienos lygybės pusės į kitą pakeičiant ženklą. Pavyzdžiui, jei $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$, tai pridėję prie abiejų lygybės pusių po vektorių $-\vec{b}$ gausime $\vec{a} + \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{c} + \vec{d} + (-\vec{b})$, $\vec{a} + \vec{0} = \vec{c} + \vec{d} + (-\vec{b})$, arba tiesiog $\vec{a} = \vec{c} + \vec{d} - \vec{b}$. Taigi vektorines lygybes galime pertvarkyti panašiai kaip skaitines.

Pratimai ir uždaviniai

28. Taškai A, B, C, D yra lygiagretainio viršūnės. Kiek vektorių su pradžios ir galo taškais lygiagretainio viršūnėse galima sudaryti? Kiek šių vektorių aibėje yra tarpusavyje nelygių vektorių? Užrašykite juos suskirstę į priešingų vektorių poras.

29. Duoti vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
Nubraižykite:
a) $\vec{a} - \vec{b}$;
b) $\vec{a} - \vec{c}$;
c) $\vec{b} - \vec{c}$;
d) $\vec{c} - \vec{b} - \vec{a}$.



30. Pažymėkite tris nesančius vienoje tiesėje taškus A, B, C ir raskite vektorių skirtumus:
a) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$; b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$; d) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$.

31. Tegu A, B ir C yra bet kokie plokštumos taškai. Įsitikinkite, kad visada teisinga lygybė $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
Kada teisinga lygybė $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}|$?

32. Trikampyje ABC pažymėkime $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ išreikškite vektorių:
a) $\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AC}$; c) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$.

33. Taškas D dalija trikampio ABC kraštinę BC pusiau: $BD = DC$. Pažymėkime: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$. Išreikškite vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vektorius $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$.

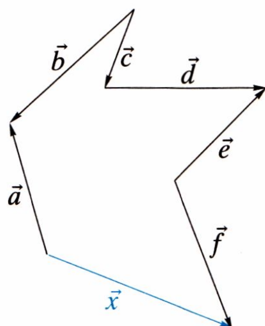
34. Taškai A, B, C, D yra rombo viršūnės, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ išreikškite vektorius: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$.

35. Tegu $ABCD$ yra stačiakampis. Ar teisinga lygybė:
a) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$;
b) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$;
c) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$?

36. Kvadrato $ABCD$ kraštinė lygi a. Apskaičiuokite:
a) $|\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}|$; b) $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}|$.

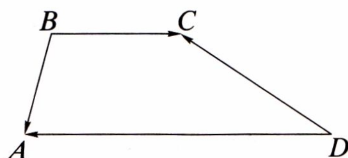
37. Įrodykite, kad bet kokiems vektoriams $\vec{a}$, $\vec{b}$ teisinga nelygybė $|\vec{a} - \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Kada ši nelygybė virsta lygybe?

38. Vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{x}$ sudaro uždarą laužtę. Išreikškite vektorių $\vec{x}$ kitais vektoriais.

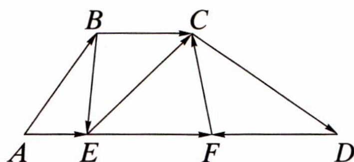


39. Plokštumos taškams E, F, G, H teisinga lygybė: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. Įrodykite, kad $\overrightarrow{EH} = -\overrightarrow{GF}$.

40. Įrodykite, kad trapecijos pagrinduose pažymėtų vektorių $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{DA}$ suma yra lygi šoninėse kraštinėse pažymėtų vektorių $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{DC}$ sumai.



41. Surašykite tuos brėžinyje pažymėtus vektorius, kuriuos galime išreikšti kurių nors kitų dviejų brėžinyje pažymėtų vektorių skirtumu.



Pavyzdys. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$.

42. Suprastinkite reiškinį:

a) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{LK} - \overrightarrow{ML}$;

b) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}) - (\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{GF})$;

c) $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{KZ} - (\overrightarrow{ZX} - \overrightarrow{YK})$;

d) $\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{PO}$.

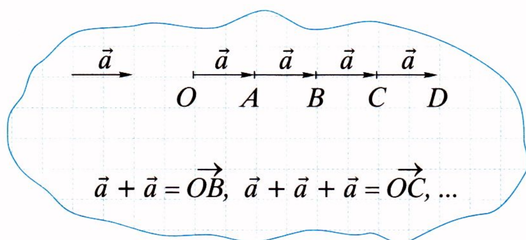
6.4. Vektorių daugyba iš skaičių

Imkime kokį nors vektorių $\vec{a}$ ir sudarykime sumas iš vienodų dėmenų:

$$\vec{a}+\vec{a}, \quad \vec{a}+\vec{a}+\vec{a}, \quad \vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}, \quad \ldots$$

Šias sumas patogu žymėti tiesiog

$$2\vec{a}, \quad 3\vec{a}, \quad 4\vec{a}, \quad \ldots$$

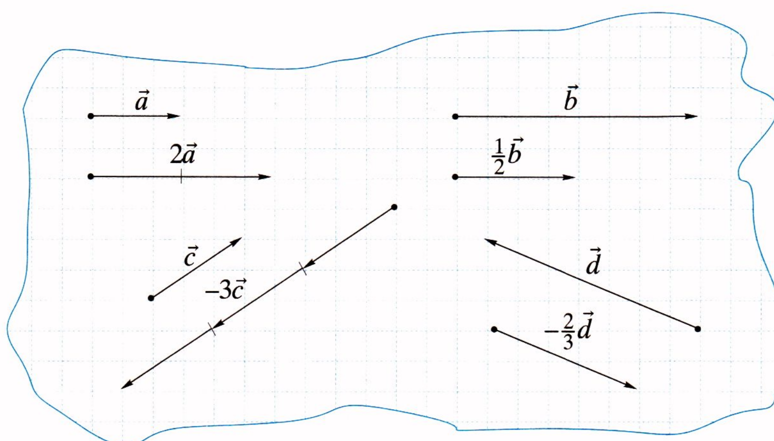


APIBRĖŽIMAS
Skaičiaus m ($m \neq 0$) ir nenulinio vektoriaus $\vec{a}$ sandauga vadinamas vektorius, kurio ilgis lygus $|m|\cdot|\vec{a}|$, o kryptis sutampa su vektoriaus $\vec{a}$ kryptimi, kai $m > 0$, ir priešinga vektoriaus $\vec{a}$ krypčiai, kai $m < 0$.
Skaičiaus m ir vektoriaus $\vec{a}$ sandauga žymima $m\vec{a}$.

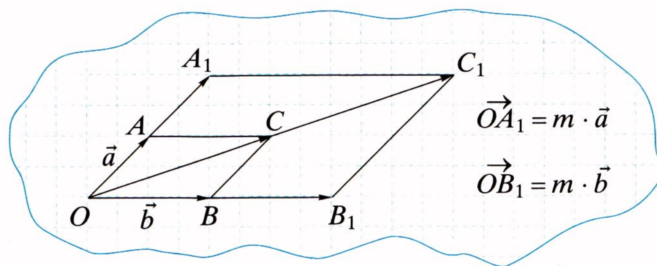
Kai $m = 0$, o $\vec{a}$ — bet koks vektorius arba m — bet koks skaičius, o $\vec{a} = \vec{0}$, tai sandauga $m\vec{a}$ vadinamas nulinis vektorius.

Pastebėkime, kad $(-1)\vec{a}$ yra priešingas vektoriui $\vec{a}$ vektorius, t. y. $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

1 PAVYZDYS. Brėžinyje pavaizduoti vektoriai $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ir jų daugybos iš atitinkamų skaičių rezultatai.



Panagrinėsime vektorių daugybos iš skaičių savybes. Atidėkime vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ iš to paties taško ir padauginkime juos iš to paties skaičiaus m (brėžinyje pavaizduotas atvejis, kai $m > 1$).



Šiame brėžinyje $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OC_1} = m\vec{a} + m\vec{b}$. Pasinaudoję trikampių panašumu galime įsitikinti, kad $\overrightarrow{OC_1} = m\overrightarrow{OC}$. Taigi

$$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}.$$

Ši savybė teisinga su visais skaičiais m ir vektoriais $\vec{a}, \vec{b}$.

1 užduotis. Nusibraižę atitinkamus brėžinius įsitikinkite, kad savybė teisinga, kai $0 < m < 1$; kai $m < 0$.

Vektorių daugyba iš skaičių taip pat turi tokias savybes:

$$(mn)\vec{a} = m(n\vec{a}), \quad (m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}.$$

Remiantis šiomis savybėmis reiškinius su vektoriais galima pertvarkinėti panašiai kaip algebrinius reiškinius.

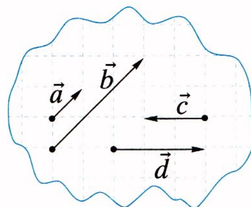
2 PAVYZDYS. Suprastinkime reiškinį $\vec{m} = -3(\vec{a} - \vec{b}) + 2{,}5(2\vec{b} - \vec{a}) - (-0{,}5\vec{a} + \vec{b})$. Pasinaudoję veiksmų su vektoriais savybėmis atskliausime reiškinius ir sudėsime panašius narius: $\vec{m} = -3\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{b} - 2{,}5\vec{a} + 0{,}5\vec{a} - \vec{b} = -5\vec{a} + 7\vec{b}$.

Tegu $\vec{a}$ koks nors vektorius, o m skaičius. Tada vektoriai $\vec{a}$ ir $m\vec{a}$ yra kolinearūs. Tarkime, kad $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs vektoriai. Jeigu $\vec{b}$ yra nenulinis vektorius, tai galima rasti skaičių m, kad $\vec{a} = m\vec{b}$.

2 užduotis. Brėžinyje pavaizduotos kolinearių vektorių poros $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$, $\vec{d}$. Parinkite skaičius m, n, k, l tokius, kad būtų teisingos lygybės:

a) $\vec{a} = m\vec{b}$, $\vec{b} = n\vec{a}$;

b) $\vec{c} = k\vec{d}$, $\vec{d} = l\vec{c}$.

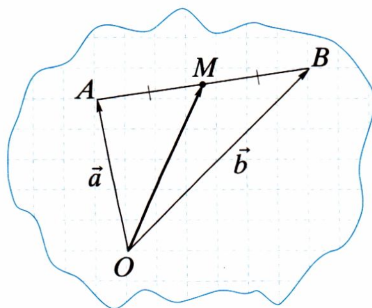


Nulinis vektorius kolinearus bet kuriam kitam vektoriui.

Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) yra kolinearūs tik tada, kai yra toks skaičius m, kad $\vec{a} = m\vec{b}$.

Naudojant vektorius dažnai patogu nagrinėti įvairius sąryšius trikampyje ar kituose daugiakampiuose.

3 PAVYZDYS.
Duota: trikampis OAB, $AM = MB$,
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.
Įrodyti: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.



Įrodymas. Remdamiesi vektorių sudėties apibrėžimu galime parašyti lygybes:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \overrightarrow{AM},$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{b} + \overrightarrow{BM}.$$

Sudėdami panariui šias lygybes gauname:

$$2\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}.$$

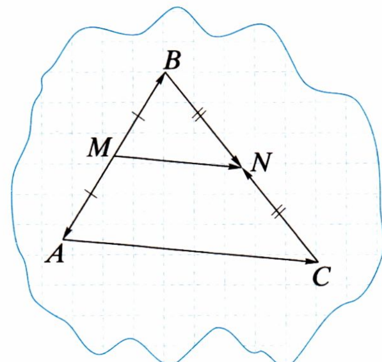
Kadangi vektoriai $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{BM}$ priešingieji, tai $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.
Vadinasi, $2\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \vec{b}$ arba $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

4 PAVYZDYS. Naudodamiesi vektoriais įrodysime trikampio vidurinės linijos teoremą: trikampio vidurinė linija lygiagreti jo kraštinei ir lygi pusei tos kraštinės.

Įrodymas. Vektorių $\overrightarrow{MN}$ dviem būdais užrašykime kitų vektorių suma:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}.$$



Abi lygybes sudėję gauname:

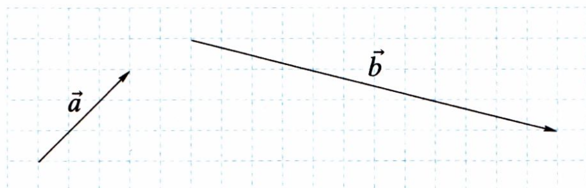
$$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}) + \overrightarrow{AC}.$$

Kadangi priešingųjų vektorių suma lygi nuliniam vektoriui, tai $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ir $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$. Vadinasi, $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$, taigi $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Iš šios lygybės darome išvadą, kad vektoriai $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AC}$ yra kolinearūs, o jų ilgiai susiję lygybe $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$. Įrodėme, kad $MN \parallel AC$ ir $MN = \frac{1}{2}AC$.

Pratimai ir uždaviniai

43. Duotas nenulinis vektorius $\vec{m}$. Pasakykite, kurie iš vektorių $2\vec{m}$; $-0{,}5\vec{m}$; $-1{,}5\vec{m}$; $2{,}5\vec{m}$ yra vienakrypčiai, o kurie — priešpriešiai su vektoriumi $\vec{m}$.

44. Duoti vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.
Nubrėžkite vektorius:
a) $2\vec{a}$; $3{,}5\vec{a}$; $-3\vec{a}$; $-1\frac{1}{3}\vec{a}$;
b) $0{,}5\vec{b}$; $-\frac{1}{3}\vec{b}$; $-0{,}25\vec{b}$; $-\frac{2}{3}\vec{b}$;
c) $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$; $1{,}5\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$.

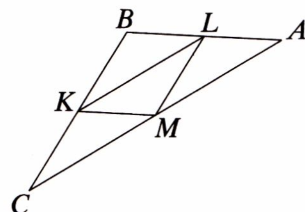


45. Nubrėžkite nekolinearius vektorius $\vec{m}$ ir $\vec{n}$, kurių pradžios nesutampa, ir pavaizduokite vektorių:
a) $\vec{p}=\frac{1}{2}\vec{m}-2\vec{n}$; b) $\vec{q}=-\vec{m}+1\frac{1}{4}\vec{n}$; c) $\vec{v}=-2(\vec{m}+0{,}5\vec{n})$.

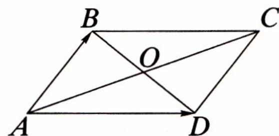
46. Trikampio ABC pusiaukraštinės AA_1 ir BB_1 kertasi taške M. Raskite tokį skaičių k, kad būtų:

a) $\overrightarrow{A_1C}=k\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AB_1}=k\overrightarrow{CB_1}$; c) $\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{BB_1}$;
d) $\overrightarrow{B_1M}=k\overrightarrow{BM}$; e) $\overrightarrow{MA_1}=k\overrightarrow{AA_1}$; f) $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MA_1}$.

47. Trikampio ABC vidurinės linijos yra KM, KL, ML. Pažymėkime $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{n}$.
Išreikškite vektorius $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{ML}$ vektoriais $\vec{m}$ ir $\vec{n}$.

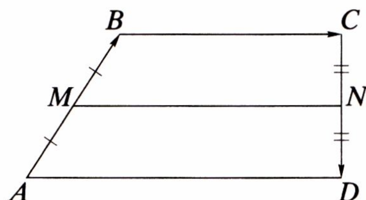


48. Lygiagretainyje $ABCD$ pažymėkime $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.
Išreikškite $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OD}$ vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.



49. Pažymėkime lygiagretainyje $ABCD$ $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$. Išreikškite vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ šiuos vektorius:
a) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

50. $ABCD$ — trapecija,
MN — trapecijos vidurinė linija,
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$.
Išreikškite vektoriais $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$:
$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{NA}$.



51. Išreikškite nežinomąjį vektorių $\vec{x}$ iš lygybių:

a) $\vec{x} - 2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{b} - 3\vec{a}$;

b) $\vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{x} = 2\vec{b} - 3\vec{a} + \vec{c}$.

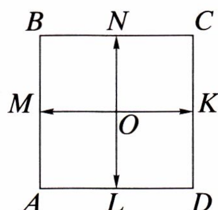
52. Kvadrato $ABCD$ įstrižainės kertasi taške O, o M, N, K, L yra kvadrato kraštinių vidurio taškai.

Kurios iš šių lygybių yra teisingos:

a) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OL}$;

b) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$;

c) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL}$?

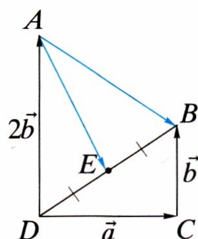


53. Vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$ ilgiai lygūs a, o kampas tarp vektorių lygus 60°. Apskaičiuokite vektoriaus $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ilgį.

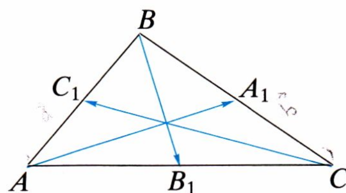
54. Remdamiesi brėžinio duomenimis:

a) išreikškite vektorių $\overrightarrow{AB}$ vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$;

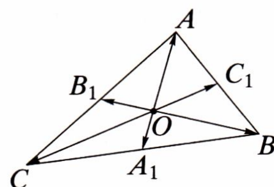
b) išreikškite vektorių $\overrightarrow{AE}$ vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.



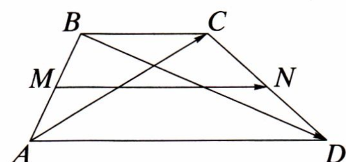
55. Duota: $\triangle ABC$, AA_1, BB_1, CC_1 — trikampio pusiaukraštinės, $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.
Išreikškite vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ šiuos vektorius: $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$.



56. Trikampio ABC pusiaukraštinės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta taške O.
Įrodykite, kad $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.
Kam lygi vektorių suma $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$?



57. Trapecijos $ABCD$ vidurinė linija yra MN.
Įrodykite, kad $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

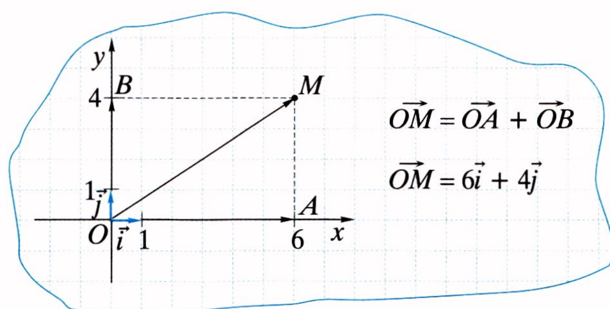


7. Vektoriaus koordinatės

7.1. Vektoriai koordinačių plokštumoje

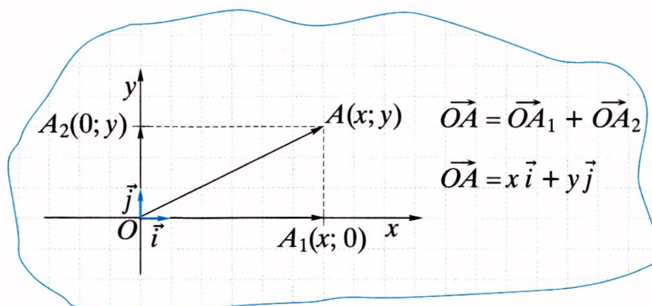
Pasirinkę koordinačių plokštumos tašką M nubrėžkime vektorių $\overrightarrow{OM}$, išeinantį iš koordinačių sistemos pradžios taško O. Vektorių $\overrightarrow{OM}$ vadinsime taško M *vietos* vektoriumi. Vietos vektorių turi kiekvienas plokštumos taškas.

Nubrėžkime taškų su koordinatėmis (1; 0) ir (0; 1) vietos vektorius ir pažymėkime juos $\vec{i}$ ir $\vec{j}$. Abiejų vektorių ilgiai lygūs vienetui. Vektorius $\vec{i}$ yra Ox ašyje, todėl jį vadinsime Ox ašies vienetiniu vektoriumi, vektorius $\vec{j}$ yra Oy ašyje, jį vadinsime Oy ašies vienetiniu vektoriumi.



Brėžinyje pavaizduoto vietos vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ galo (taško M) koordinatės yra $x = 6$, $y = 4$. Iš taško M nubrėžę statmenis į koordinačių ašis pažymėkime Ox ašyje vektorių $\overrightarrow{OA} = 6\vec{i}$ ir Oy ašyje vektorių $\overrightarrow{OB} = 4\vec{j}$. Matome, kad $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, arba $\overrightarrow{OM} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$. Vietos vektorių $\overrightarrow{OM}$ išreiškėme vienetiniais vektoriais $\vec{i}$ ir $\vec{j}$.

Vienetiniais vektoriais galima išreikšti ir bet kurį kitą vietos vektorių. Tegu $A(x; y)$ yra koordinačių plokštumos taškas. Nubrėžkime per šį tašką statmenis ašims Ox ir Oy ir pažymėkime taškus $A_1(x; 0)$ ir $A_2(0; y)$.

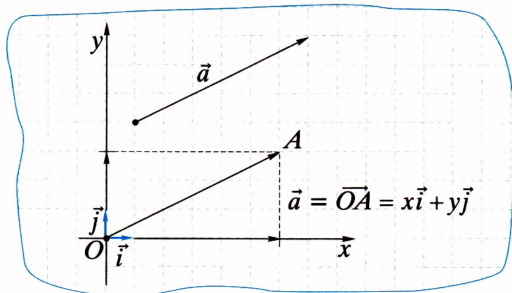


Kadangi $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$, tai gauname, kad $\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}$; čia skaičiai x ir y — taško A koordinatės.

Taigi kiekvieną vietos vektorių galima išreikšti vienetiniais vektoriais $\vec{i}$ ir $\vec{j}$, išraiškos koeficientai yra atitinkamos vektoriaus galo taško koordinatės.

1 užduotis. Koordinačių plokštumoje virš Ox ašies nubraižytas lygiakraštis trikampis ABC, $A(1; 0)$, $B(2; 0)$. Išreikškite vietos vektorius $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ vienetiniais.

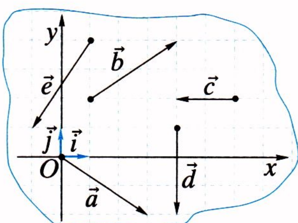
Jei $\vec{a}$ nėra vietos vektorius, tai atidėkime iš taško O jam lygų vietos vektorių $\overrightarrow{OA}$: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Šį vektorių galėsime išreikšti vienetiniais vektoriais: $\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Tada ir $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



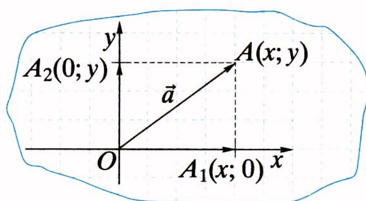
Kiekvieną koordinačių plokštumos vektorių $\vec{a}$ galima išreikšti vienetiniais vektoriais $\vec{i}$, $\vec{j}$. Jei $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, tai skaičiai x, y vadinami vektoriaus $\vec{a}$ koordinatėmis. *Vektoriaus koordinates nurodysime taip: $\vec{a}(x; y)$.*

Jei $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ yra vietos vektorius ir taško A koordinatės yra $(x; y)$, tai $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Jei $\vec{a}$ yra nulinis vektorius ($\vec{a} = \vec{0}$), tai abi jo koordinatės lygios nuliui: $\vec{0}(0; 0)$. Vadinasi, vietos vektoriaus koordinatės yra jo galo taško koordinatės.

2 užduotis. Raskite vektorių $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ koordinates.



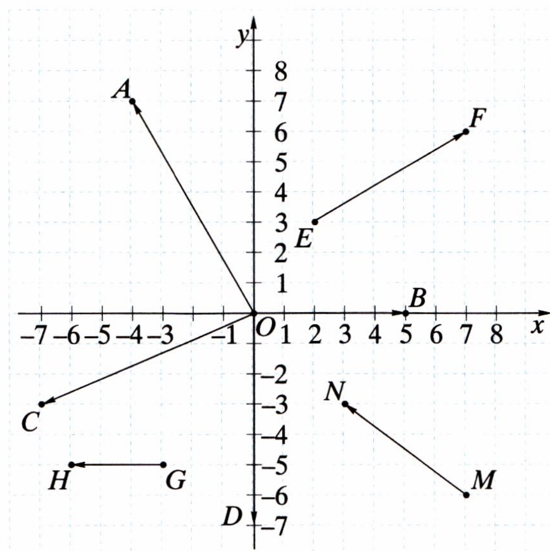
Tegu vektoriaus $\vec{a}$ koordinatės yra $(x; y)$, taigi $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Pasinaudoję Pitagoro teorema galime apskaičiuoti vektoriaus $\vec{a}$ ilgį:



$$OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2,$$
$$OA^2 = x^2 + y^2,$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Pratimai ir uždaviniai

58. Raskite brėžinyje pavaizduotų vektorių koordinates:
a) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$; b) $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AO}$.



59. Pavaizduokite koordinačių plokštumoje vietos vektorius:
a) $\overrightarrow{OA}(-3; -5)$, $\overrightarrow{OB}(-2; 2{,}5)$, $\overrightarrow{OC}(0; -3)$, $\overrightarrow{OD}(6; 0)$, $\overrightarrow{OE}(1; 1)$;
b) $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{c} = -6\vec{i} + 3{,}5\vec{j}$, $\vec{d} = 3\vec{i}$, $\vec{e} = -2\vec{j}$, $\vec{f} = -\vec{i} + \vec{j}$.

60. Parašykite šių vektorių koordinates:
$\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 4\vec{j}$; $\overrightarrow{CD} = -5\vec{i} + \vec{j}$; $\overrightarrow{EF} = -0{,}5\vec{i} - 1{,}5\vec{j}$;
$\overrightarrow{GH} = 4\frac{1}{3}\vec{i} + 2\frac{2}{3}\vec{j}$; $\overrightarrow{KL} = -2{,}3\vec{j}$; $\overrightarrow{MN} = 3{,}2\vec{i}$; $\vec{0}$.

61. Vektorius išreikškite vienetiniais vektoriais $\vec{i}$ ir $\vec{j}$:
$\vec{p}(0; -2)$; $\vec{r}(3; 0)$; $\vec{s}(-6; -6)$; $\vec{t}(-1; 1)$; $\vec{v}(3{,}7; -4{,}6)$; $\vec{z}(\sqrt{2}; 1)$.

62. a) Stačiakampio $ABCD$ trijų viršūnių koordinatės $A(-1; 0)$, $B(2; 0)$, $C(2; -3)$. Išreikškite vietos vektorius $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ vienetiniais ir raskite jų ilgius.

b) Virš Ox ašies nubraižytas rombas $ABCD$. Žinomos rombo dviejų viršūnių koordinatės: $A(1; 0)$, $D(2; 0)$, ir kampas $\angle BAD = 30°$. Išreikškite vietos vektorius $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ vienetiniais ir raskite jų ilgius.

7.2. Vektorių veiksmai ir koordinatės

Tegu $\vec{a}(x_1; y_1)$ ir $\vec{b}(x_2; y_2)$ yra du koordinačių plokštumos vektoriai: $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ ir $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$. Sudėkime vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, iš vektoriaus $\vec{a}$ atimkime vektorių $\vec{b}$, bei vektorių $\vec{a}$ padauginkime iš skaičiaus k ($k \in \boldsymbol{R}$):

$$\vec{a} + \vec{b} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j};$$
$$\vec{a} - \vec{b} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} - x_2\vec{i} - y_2\vec{j} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j};$$
$$k\vec{a} = k(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (kx_1)\vec{i} + (ky_1)\vec{j}.$$

Šios lygybės rodo, kaip žinant vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ koordinates rasti vektorių $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $k\cdot\vec{a}$ koordinates.

Jei vektoriaus $\vec{a}$ koordinatės yra $(x_1; y_1)$, vektoriaus $\vec{b}$ — $(x_2; y_2)$, tai vektorių $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $k\vec{a}$ ($k \in \boldsymbol{R}$) koordinatės yra $(x_1+x_2; y_1+y_2)$, $(x_1-x_2; y_1-y_2)$, $(kx_1; ky_1)$.

1 PAVYZDYS. Duoti vektoriai $\vec{a}(-2; 5)$, $\vec{b}(3; 0)$. Raskime vektoriaus $\vec{m}$ koordinates, kai $\vec{m} = 2\vec{a} + 1{,}2\vec{b}$.
Kadangi $\vec{a} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i}$, tai

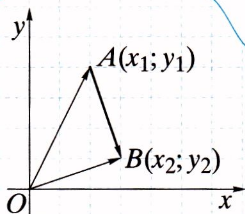
$$\vec{m} = 2(-2\vec{i} + 5\vec{j}) + 1{,}2(3\vec{i}) = -4\vec{i} + 10\vec{j} + 3{,}6\vec{i} = -0{,}4\vec{i} + 10\vec{j}.$$

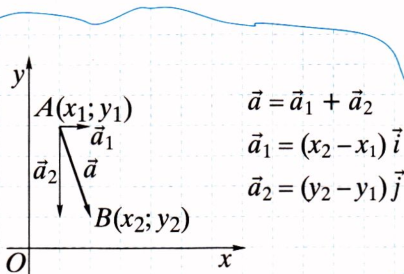
Taigi $\vec{m}(-0{,}4; 10)$. Galima skaičiuoti ir iš karto: pažymėję $\vec{m}$ koordinates x, y gausime $x = 2\cdot(-2) + 1{,}2\cdot 3 = -0{,}4$, $y = 2\cdot 5 + 1{,}2\cdot 0 = 10$.

1 užduotis. Raskite vektoriaus $\vec{m} = 1{,}4\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$ koordinates, jei $\vec{a}(-2; 5)$, $\vec{b}(3; 0)$, $\vec{c}(2{,}5; -4)$.

Vietos vektoriaus koordinatės sutampa su jo galo taško koordinatėmis. O kaip apskaičiuoti bet kokio, t. y. nebūtinai vietos, vektoriaus koordinates?

Nagrinėkime vektorių $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, kurio pradžios taškas nesutampa su koordinačių pradžios tašku ir yra $A(x_1; y_1)$, o galo taškas $B(x_2; y_2)$.

a)


b)


Matome, kad $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (žr. a brėžinį). Kadangi $\overrightarrow{OB}$ ir $\overrightarrow{OA}$ yra vietos vektoriai, tai $\overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, $\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$. Tada

$$\vec{a} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}.$$

Taigi $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Vektorių $\overrightarrow{AB}$ išreikšti vienetiniais vektoriais ir rasti jo koordinates galima ir nesinaudojant vietos vektoriais (žr. b brėžinį).

Jeigu vektoriaus $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ pradžios taško koordinatės yra $(x_1; y_1)$, o galo — $(x_2; y_2)$, tai $\vec{a}$ koordinatės yra $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, t. y. galime rašyti $\vec{a}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Jau žinome, kad vietos vektoriaus $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ilgis skaičiuojamas pagal formulę: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tegu $\vec{a}$ yra bet koks vektorius, $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$ yra jo pradžios ir galo taškai, t. y. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Randame vektoriaus $\vec{a}$ koordinates: $\vec{a}((x_2 - x_1); (y_2 - y_1))$. Taigi vektoriaus $\vec{a}$ ilgis apskaičiuojamas taip:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (\vec{a} = \overrightarrow{AB}, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2))$$

2 PAVYZDYS. Apskaičiuokime vektoriaus $\overrightarrow{MN}$ koordinates ir ilgį, jeigu jo pradžios ir galo taškai yra $M(-3; 4)$, $N(2{,}5; 0)$.

Vektoriaus $\overrightarrow{MN}$ koordinates $(x; y)$ apskaičiuojame taip: $x = 2{,}5 - (-3) = 5{,}5$, $y = 0 - 4 = -4$. Tada vektoriaus ilgis $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{5{,}5^2 + (-4)^2} = \sqrt{46{,}25}$.

Žinome, kad vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ yra kolinearūs tik tada, kai atsiras toks skaičius m, kad $\vec{a} = m\vec{b}$. Jei $\vec{a}$ koordinatės yra $(x_1; y_1)$, o $\vec{b}$ — (x_2, y_2), tai iš $\vec{a} = m\vec{b}$ gauname $x_1 = mx_2$, $y_1 = my_2$.

Jeigu yra toks skaičius m, kad vektorių $\vec{a}(x_1; y_1)$ ir $\vec{b}(x_2; y_2)(\vec{b} \neq \vec{0})$ koordinatės tenkina lygybes $x_1 = mx_2$, $y_1 = my_2$, tai vektoriai $\vec{a}, \vec{b}$ yra kolinearūs. Jeigu tokio skaičiaus nėra, tai vektoriai yra nekolinearūs.

3 PAVYZDYS. Ar kolinearūs vektoriai $\vec{a}(1; -2)$, $\vec{b}(0{,}5; -1)$?

Jei jie būtų kolinearūs, tai su tuo pačiu skaičiumi m turėtų būti teisingos lygybės $1 = m \cdot 0{,}5$, $-2 = m \cdot (-1)$. Matome, kad šios lygybės teisingos su $m = 2$, taigi vektoriai kolinearūs.

2 užduotis. Suraskite tą k reikšmę, su kuria vektoriai $\vec{a}(k; 1)$ ir $\vec{b}(2; 3)$ yra kolinearūs.

Pratimai ir uždaviniai

63. Parašykite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sumos koordinates:

a) $\vec{a}(-7{,}5; 5)$, $\vec{b}(2{,}5; 3)$;
b) $\vec{a}(4{,}3; 0)$, $\vec{b}(0; -2{,}4)$;
c) $\vec{a} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$;
d) $\vec{a} = 3{,}3\vec{i}$, $\vec{b} = -3{,}3\vec{j}$.

64. Parašykite vektoriaus $\vec{a} - \vec{b}$ koordinates:

a) $\vec{a}(-0{,}5; 1{,}5)$, $\vec{b}(-4{,}5; -2{,}5)$;
b) $\vec{a}(0; -1\frac{1}{3})$, $\vec{b}(-1\frac{1}{4}; 0)$;
c) $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = -5\vec{i}$;
d) $\vec{a} = 4{,}8\vec{j}$, $\vec{b} = -2{,}2\vec{j}$.

65. Raskite vektorių $3\vec{m}$, $-2\vec{m}$, $-\vec{m}$, $5{,}5\vec{m}$, $-0{,}1\vec{m}$ koordinates, kai $\vec{m}(4; -5)$.

66. Duota: $\vec{a}(-1; 2)$, $\vec{b}(2; -4)$. Raskite $\vec{p}$ koordinates, kai:

a) $\vec{p} = -\vec{a} + 3\vec{b}$;
b) $\vec{p} = -2\vec{a} - 4\vec{b}$;
c) $\vec{p} = 5\vec{a} + 0{,}1\vec{b}$;
d) $\vec{p} = 10\vec{a} - \vec{b}$.

67. Įrodykite, kad vektoriai $\vec{k}(0{,}1; -2{,}5)$ ir $\vec{r}(1; -25)$ yra vienakrypčiai, o vektoriai $\vec{m}(-2; 0{,}1)$ ir $\vec{n}(0{,}2; -0{,}01)$ — priešpriešiai.

68. Vektoriai $\vec{a}(-2; 1)$ ir $\vec{b}(x; -3)$ yra kolinearūs. Raskite x.

69. Kokia turi būti x reikšmė, kad vektoriai $\vec{m}(x; 2)$ ir $\vec{n}(4{,}5; x)$ būtų kolinearūs ir vienakrypčiai?

70. Apskaičiuokite vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinates ir ilgį, jeigu jo pradžios ir galo koordinatės yra:

a) $A(1; 4)$, $B(4; 4)$;
b) $A(-2; -7)$, $B(-5; -3)$;
c) $A(-6; -8)$, $B(-6; 2)$;
d) $A(1; 0)$, $B(2; -1)$.

71. Raskite vektoriaus $\vec{a} + \vec{b}$ ilgį, kai:

a) $\vec{a}(2; -8)$, $\vec{b}(-8; 16)$;
b) $\vec{a}(-2; -1{,}5)$, $\vec{b}(-1; -2{,}5)$;
c) $\vec{a}(5; 7)$, $\vec{b}(7; -2)$;
d) $\vec{a} = \vec{c}$, $\vec{b} = \vec{a} - 2\vec{c}$, $\vec{c}(1; 2)$.

72. Raskite vektoriaus $\vec{a} - \vec{b}$ ilgį, kai:

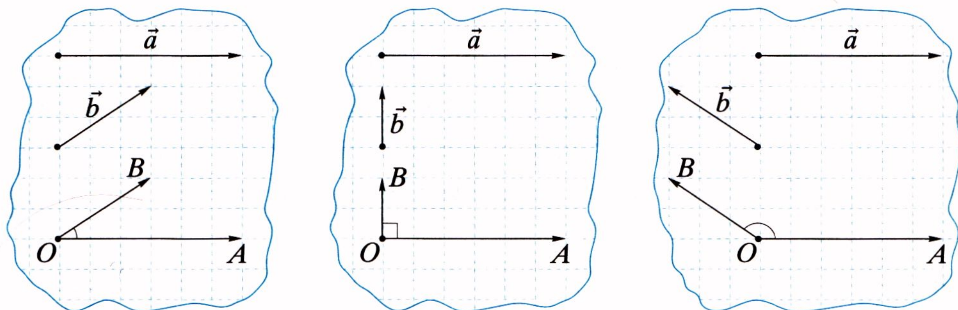
a) $\vec{a}(6; -7)$, $\vec{b}(14; 8)$;
b) $\vec{a}(10; 16)$, $\vec{b}(-2; 0)$;
c) $\vec{a}(-15; -7)$, $\vec{b}(-75; -18)$;
d) $\vec{a} = -\vec{c}$, $\vec{b} + 2\vec{c} = \vec{0}$, $\vec{c}(3; 4)$.

8. Vektorių skaliarinė daugyba

8.1. Skaliarinės daugybos apibrėžimas

Sudėję du vektorius, taip pat padauginę vektorių iš skaičiaus vėl gauname vektorių. Apibrėšime dar vieną veiksmą su vektoriais — daugybą. Ji skiriasi nuo kitų veiksmų su vektoriais tuo, kad jos rezultatas yra ne vektorius, bet skaičius. Todėl šį vektorių veiksmą vadinsime *skaliarine* daugyba, o jos rezultatą — skaliarine sandauga. Skaliarais gamtos moksluose ir matematikoje vadinami dydžiai, kurie apibrėžiami tik skaitine reikšme, taigi juos galima matuoti turint atitinkamą skalę. Pavyzdžiui, jėga, veikianti judantį kūną, yra vektorius, o jos atliktas darbas, kai kūnas pasislenka iš vienos vietos į kitą — skaliaras.

Iš pradžių apibrėžkime kampą tarp vektorių. Tegu plokštumoje duoti du nenuliniai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Atidėkime juos iš to paties taško.



Tada vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ bus dviejuose iš to paties taško išeinančiuose spinduliuose OA ir OB.

Kampu tarp dviejų nenulinių vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, atidėtų iš to paties taško, vadiname kampą tarp iš to paties taško išeinančių spindulių, kuriuose yra šie vektoriai.
Kampu tarp bet kurių dviejų nenulinių vektorių vadiname kampą tarp šiems vektoriams atitinkamai lygių vektorių, atidėtų iš vieno taško.

Kampas tarp dviejų vektorių gali būti smailus, status, bukas, taip pat nulinis ir ištiestinis. Kampas tarp dviejų vektorių yra nulinis, kai vektoriai yra vienakrypčiai; kai vektoriai yra priešpriešiai — kampas yra ištiestinis.

Kampo tarp dviejų nenulinių vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ didumą žymėsime $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Jeigu kampas yra status, t. y. $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90^\circ$, tai vektorius vadinsime statmenais, žymėsime $\vec{a} \perp \vec{b}$. Bet kuriems nenuliniams vektoriams $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ teisinga nelygybė

$$0^\circ \leqslant (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \leqslant 180^\circ.$$

1 užduotis. Trikampis ABC yra lygiakraštis, taškas O yra jo centras. Raskite $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CO}})$.

Dabar jau galime apibrėžti dviejų vektorių skaliarinę sandaugą.

APIBRĖŽIMAS

Dviejų nenulinių vektorių skaliarine sandauga vadinamas skaičius, lygus tų vektorių ilgių ir kampo tarp jų kosinuso sandaugai. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinė sandauga žymima $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Jeigu bent vienas iš dviejų vektorių yra nulinis, tai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui.

Taigi kai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nenuliniai, tai

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

Matome, kad dviejų vektorių skaliarinės sandaugos didumas priklauso nuo vektorių ilgių ir kampo tarp jų.

PAVYZDYS. Apskaičiuokime vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, o kampas tarp vektorių yra: a) $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$; b) $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90^\circ$; c) $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120^\circ$.

Atveju a) gauname: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 60^\circ = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$. Kadangi $\cos 90^\circ = 0$, tai atveju b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Atveju c) pasinaudoję tuo, kad $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, gauname $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 120^\circ = -4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = -4$.

Sandaugą $\vec{a} \cdot \vec{a}$ žymėsime $\vec{a}^2$ ir vadinsime vektoriaus $\vec{a}$ skaliariniu kvadratu. Kai vektorius yra nulinis, tai ir jo skaliarinis kvadratas lygus nuliui. Kai vektorius yra nenulinis, tai jis su pačiu savimi (arba jam lygiu vektoriumi) sudaro nuliui laipsnių lygų kampą, todėl $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}||\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.

Vektoriaus skaliarinis kvadratas lygus jo ilgio kvadratui, t. y. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Iš skaliarinės sandaugos apibrėžimo lygybės $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ išplaukia, kad dviejų nenulinių vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui tik tada, kai $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Lygybė $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ teisinga tik tuomet, kai vektoriai yra statmeni, t. y. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Dviejų nenulinių vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui tik tada, kai šie vektoriai yra statmeni.

2 užduotis. Remdamiesi skaliarinės sandaugos apibrėžimu paaiškinkite, kada $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ir kada $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$.

Jeigu žinome vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ ilgius bei jų skaliarinę sandaugą $\vec{a} \cdot \vec{b}$, tai naudodamiesi formule $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ galime rasti kampą tarp vektorių.

Pratimai ir uždaviniai

73. Stačiakampio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O. Kraštinė AB lygi pusei įstrižainės AC. Raskite kampą tarp vektorių:

a) $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{DO}$ ir $\overrightarrow{DC}$; c) $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$;

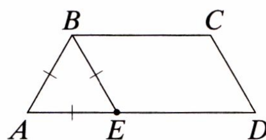
d) $\overrightarrow{DO}$ ir $\overrightarrow{OC}$; e) $\overrightarrow{OB}$ ir $\overrightarrow{OD}$; f) $\overrightarrow{AO}$ ir $\overrightarrow{OC}$;

g) $\overrightarrow{CB}$ ir $\overrightarrow{AO}$; h) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{DA}$; i) $\overrightarrow{DO}$ ir $\overrightarrow{OA}$.

74. Trapecijos $ABCD$ kraštinėje AD pažymėtas taškas E: $BE \parallel CD$, o trikampis ABE yra lygiakraštis. Raskite kampą tarp vektorių:

a) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{CB}$ ir $\overrightarrow{CD}$; c) $\overrightarrow{EA}$ ir $\overrightarrow{DC}$;

d) $\overrightarrow{EB}$ ir $\overrightarrow{CD}$; e) $\overrightarrow{DE}$ ir $\overrightarrow{EA}$; f) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CB}$.



75. Apskaičiuokite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai:

a) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 8$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$;

b) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0^\circ$;

c) $|\vec{a}| = 1{,}6$, $|\vec{b}| = 0{,}5$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180^\circ$;

d) $|\vec{a}| = 2{,}5$, $|\vec{b}| = 1{,}4$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 150^\circ$.

76. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinės ilgis 5. Nubrėžta trikampio aukštinė BD. Apskaičiuokite skaliarinę sandaugą:

a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$;

d) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC}$; e) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$; f) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA}$;

g) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$; h) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB}$; i) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

77. Apskaičiuokite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai:

a) $\vec{a}(3; 4)$, $|\vec{b}| = 5$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$;

b) $\vec{a}(1; -4)$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{17}$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 45^\circ$;

c) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $\vec{b}(-2; -2)$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90^\circ$.

78. Duotas lygiakraštis trikampis ABC, kurio kraštinė lygi 1. Apskaičiuokite vektorių skaliarinių sandaugų sumą $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

79. Stačiojo trikampio ABC įžambinė AB lygi c, kampas C status. Apskaičiuokite vektorių skaliarinių sandaugų sumą $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

8.2. Skaliarinės sandaugos reiškimas koordinatėmis

Kiekvieną koordinačių plokštumos vektorių galime išreikšti vienetiniais vektoriais. Panagrinėkime du nenulinius vektorius: $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, t. y. vektorius $\vec{a}(x_1; y_1), \vec{b}(x_2; y_2)$. Jeigu šie vektoriai yra kolinearūs, tai atsiras toks skaičius k, kad $\vec{a} = k\vec{b}$; tada $x_1 = kx_2$, $y_1 = ky_2$. Tarkime, kad šie vektoriai yra vienakrypčiai, taigi $k > 0$, $|\vec{a}| = k|\vec{b}|$, o kampas tarp vektorių yra nulinis. Todėl šių vektorių skaliarinę sandaugą skaičiuojame taip:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0^\circ = k \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{b}| = k \cdot |\vec{b}|^2.$$

Kadangi $|\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2$, tai

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = k(x_2^2 + y_2^2) = (kx_2)x_2 + (ky_2)y_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

1 užduotis. Įrodykite, kad bet kurių priešpriešių vektorių $\vec{a}(x_1; y_1), \vec{b}(x_2; y_2)$ skaliarinė sandauga taip pat skaičiuojama pagal formulę $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Taigi bet kokių kolinearių vektorių $\vec{a}(x_1; y_1), \vec{b}(x_2; y_2)$ skaliarinę sandaugą galime skaičiuoti daugindami ir sudėdami atitinkamas koordinates: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Įrodysime, kad ši formulė teisinga ne tik kolineariems vektoriams.

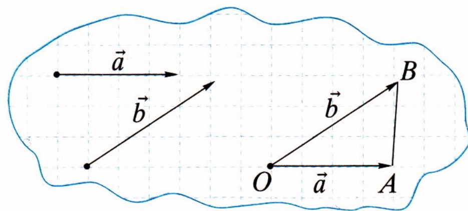
TEOREMA

Vektorių $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$ skaliarinę sandaugą galima apskaičiuoti pagal formulę

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2,$$

t. y. dviejų vektorių skaliarinė sandauga lygi tų vektorių atitinkamų koordinačių sandaugų sumai.

Įrodymas. Jau įsitikinome, kad šis teiginys teisingas, kai vektoriai yra kolinearūs. Taigi pakanka nagrinėti nekolinearių vektorių porą. Atidėkime juos iš vieno taško O: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Sujunkime vektorių galų taškus A ir B ir taikykime kosinusų teoremą trikampiui ABO:



$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}). \quad (1)$$

Kadangi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$, o $OA \cdot OB \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$, tai (1) lygybę galima perrašyti taip: $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$. Iš jos randame

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2\right). \quad (2)$$

Apskaičiuosime vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{b}-\vec{a}$ ilgių kvadratus. Kadangi vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ koordinatės yra $(x_1; y_1)$ ir $(x_2; y_2)$, tai vektoriaus $\vec{b}-\vec{a}$ koordinatės — $(x_2-x_1; y_2-y_1)$. Taigi $|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2$, $|\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2$, $|\vec{b}-\vec{a}|^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$. Įrašę šias išraiškas į (2) formulę, gauname:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{1}{2}\left(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_2 - y_1^2\right) = \\ &= \frac{1}{2}(2x_1x_2 + 2y_1y_2) = \\ &= x_1x_2 + y_1y_2.\end{aligned}$$

Įrodėme, kad ir nekolineariems vektoriams $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$ teisinga lygybė

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Prisiminkime, kad du nenuliniai vektoriai yra statmeni tik tada, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui.

Pasirėmę įrodyta teorema galime padaryti tokią išvadą.

Nenuliniai vektoriai $\vec{a}(x_1; y_1)$ ir $\vec{b}(x_2; y_2)$ statmeni tik tada, kai $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

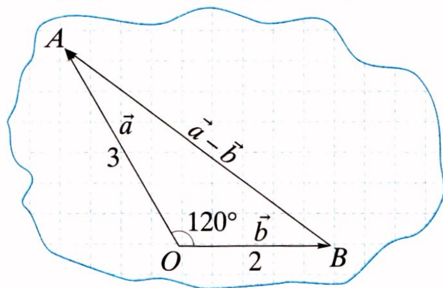
Naudojantis teorema apie skaliarinės sandaugos reiškimą koordinatėmis nesunku įrodyti šias vektorių skaliarinės daugybos savybes:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ — perstatymo dėsnis;
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$ — skirstymo dėsnis;
$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ — jungimo dėsnis.

2 užduotis. Įrodykite išvardytas skaliarinės daugybos savybes.

Naudojantis šiomis savybėmis vektorinius reiškinius su skaliarine sandauga galima pertvarkinėti panašiai kaip algebrinius reiškinius.

PAVYZDYS. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudaro 120° kampą, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$. Apskaičiuokime: a) $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$; b) $|\vec{a}-\vec{b}|$.



a) Remdamiesi skaliarinės sandaugos apibrėžimu ir jos savybėmis gauname:

$$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{a}^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}^2 =$$
$$= 2\vec{a}^2 + 3\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}^2 = 2|\vec{a}|^2 + 3|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 120^\circ - 2|\vec{b}|^2 =$$
$$= 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\cdot 2^2 = 18 - 9 - 8 = 1.$$

b) Pasinaudokime tuo, kad vektoriaus ilgio kvadratas lygus skaliariniam kvadratui:

$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2.$

Kadangi $\vec{a}^2 = 3^2 = 9$, $\vec{b}^2 = 2^2 = 4$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$, tai

$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = 9 + 6 + 4 = 19.$

Gavome: $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{19}.$

Pratimai ir uždaviniai

80. Apskaičiuokite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai:

a) $\vec{a}(2; 3)$, $\vec{b}(4; -2)$;

b) $\vec{a}(0; -5)$, $\vec{b}(-1; 1)$;

c) $\vec{a}(-0{,}8; -1{,}5)$, $\vec{b}(-0{,}5; 2{,}4)$;

d) $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$.

81. Apskaičiuokite vektorių $\vec{m}$ ir $\vec{n}$ skaliarinę sandaugą, kai $\vec{m} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$, $A(2; -3)$, $B(4; 0)$.

82. Ar statmeni vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$:

a) $\vec{a}(-2; 4)$ ir $\vec{b}(6; 3)$;

b) $\vec{a}(2; 3)$ ir $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $A(2; -1)$, $C(0; -2)$?

83. a) Su kuria x reikšme vektoriai $\vec{a}(-4; 5)$, $\vec{b}(x; -2)$ yra vienas kitam statmeni?

b) Su kuria x reikšme vektoriai $\vec{m}(3; 5)$ ir $\vec{n} = \overrightarrow{MN}$ yra vienas kitam statmeni, jei $M(x; 1)$, $N(3; 7)$?

84. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudaro 120° kampą, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Apskaičiuokite:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; b) $|\vec{a}+\vec{b}|$; c) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$.

85. Taškai $A(0; \sqrt{3})$, $B(2; \sqrt{3})$ ir $C(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ yra trikampio viršūnės. Įrodykite, kad $\angle C = 90^\circ$.

86. Įsitikinkite, kad kampo α tarp nenulinių vektorių $\vec{a}(x_1; y_1)$ ir $\vec{b}(x_2; y_2)$ kosinusas išreiškiamas formule

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

87. Naudodamiesi 86 uždavinio formule raskite kampą tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, kai:

a) $\vec{a}(1; 1)$, $\vec{b}(0; 1)$; b) $\vec{a}(1{,}5; 0)$, $\vec{b}(2; -2\sqrt{3})$.

9. Kartojimo uždaviniai

Vektorių veiksmai

1. Duotas vektorius $\overrightarrow{AB}$ ir taškas C, nepriklausantis tiesei AB. Nubrėžkite vektorių, išeinantį iš taško C, kuris su duotuoju vektoriumi būtų:
a) vienakryptis; b) priešpriešis; c) lygus; d) nekolinearus.

2. Duotas stačiakampis $ABCD$. Vektorius $\overrightarrow{BD}$ ir $\overrightarrow{AC}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$.

3. Duotas lygiagretainis $ABCD$, M — jo įstrižainių susikirtimo taškas.
Įrodykite, kad $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

4. Iš taško O atidėti vienas kitam statmeni vektoriai $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$.
Įrodykite, kad $\left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right|$.

5. Trys taškai A, B ir C išsidėstę taip, kad $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$.
Įrodykite, kad bet kuriam taškui O yra teisinga lygybė $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$.

6. $ABCD$ — lygiagretainis.
Raskite vektorius:
a) $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AO}$; b) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; c) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AO}$.

7. Duotas lygiagretainis $ABCD$ ir O — bet kuris plokštumos taškas.
Įrodykite, kad $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

8. Duoti keturi plokštumos taškai A, B, C, M. Įrodykite lygybes:
a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$;
b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CM}$.

9. Trikampyje ABC, kurio $CB = a$, $CA = b$, nubrėžta pusiaukampinė CC_1.
a) Naudodamiesi trikampio pusiaukampinės savybe įrodykite, kad $\frac{BC_1}{BA} = \frac{a}{a+b}$.
b) Išreiškę $\overrightarrow{BC_1}$ ir $\overrightarrow{BA}$ vektorių skirtumais įrodykite, kad $\overrightarrow{CC_1} = \frac{a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}}{a+b}$.

10. Vektorius $\overrightarrow{OA}$ statmenas vektoriui $\overrightarrow{OB}$, be to, $\left|\overrightarrow{OA}\right| = a$, $\left|\overrightarrow{OB}\right| = b$. Iš taško O atkarpai AB nubrėžtas statmuo OC.
a) Įrodykite, kad $\frac{AC}{CB} = \frac{a^2}{b^2}$.
b) Išreikškite $\overrightarrow{AC}$ vektoriumi $\overrightarrow{AB}$.
c) Išreiškę $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{AB}$ vektorių skirtumais įrodykite, kad $\overrightarrow{OC} = \frac{a^2\overrightarrow{OB}+b^2\overrightarrow{OA}}{a^2+b^2}$.

Vektoriaus koordinatės. Skaliarinė daugyba

11. Duoti vektoriai $\vec{a}(1; 0)$, $\vec{b}(1; 2)$, $\vec{c}(1; 3)$. Raskite vektorių $\vec{b}+\vec{c}$ ir $\vec{a}-\vec{b}$ koordinates.

12. Duotas vektorius $\vec{a}(5; -12)$. Raskite šio vektoriaus ilgį.

13. Duoti vektoriai $\vec{m}(-2; 1)$ ir $\vec{n}(1; 0)$. Raskite vektorių $\frac{1}{3}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}$.

14. Nuo taško $A(2; 1)$ atidėkite vektorių $\vec{a}(2; 1)$.

15. Duoti trys taškai $A(-1; 1)$, $B(0; 2)$ ir $C(-2; 0)$. Įrodykite, kad $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}$.

16. Duoti trys taškai $A(3; 0)$, $B(-2; -2)$ ir $C(1; -3)$. Raskite tokį tašką $M(x; y)$, kad vektorius $\overrightarrow{BA}$ būtų lygus vektoriui $\overrightarrow{CM}$.

17. Apskaičiuokite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai:

a) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=30°$;

b) $|\vec{a}|=2{,}4$, $|\vec{b}|=1{,}5$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=120°$;

c) $\vec{a}(-2; 1)$, $\vec{b}(3; 0)$;

d) $\vec{a}(1{,}2; -3)$, $\vec{b}(2{,}5; 1{,}4)$.

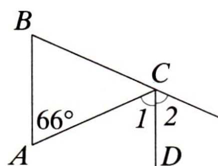
18. Duoti vektoriai $\vec{a}(-2; 3)$ ir $\vec{b}(2; n)$. Kokia turi būti kintamojo n reikšmė, kad šie vektoriai būtų statmeni?

19. Duoti vektoriai $\vec{a}(1; 4)$ ir $\vec{b}(-3; 2)$. Raskite tokį skaičių m, kad vektorius $\vec{a}+m\vec{b}$ būtų statmenas vektoriui $\vec{a}$.

20. Raskite kampo tarp vektorių $\vec{c}(1; 1)$ ir $\vec{d}\left(2; \frac{1}{2}\right)$ kosinusą.

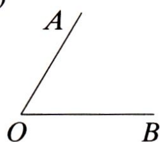
Geometrijos uždaviniai

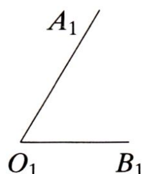
21. Trikampio ABC kampas A lygus 66°. Nubrėžta kampo C priekampio pusiaukampinė CD yra lygiagreti kraštinei AB. Įrodykite, kad trikampis ABC lygiašonis.



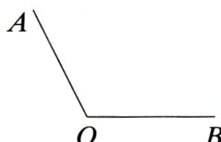
22. Dviejų smailiųjų (arba bukųjų) kampų kraštinės yra atitinkamai lygiagrečios. Įrodykite, kad tie kampai lygūs.

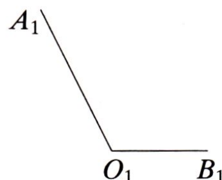
a)





b)



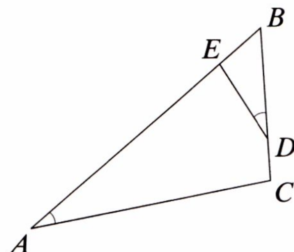


Duota: $OA \parallel O_1A_1$, $OB \parallel O_1B_1$. Įrodyti: $\angle O=\angle O_1$.

23. Duoti du kampai, kurių kraštinės yra atitinkamai lygiagrečios. Vienas kampas smailusis, o kitas — bukasis. Įrodykite, kad tų kampų suma lygi $180°$.

24. Du trikampio kampai atitinkamai lygūs $73°$ ir $28°$. Raskite mažesnįjį kampą, kuriuo kertasi šių kampų pusiaukampinės.

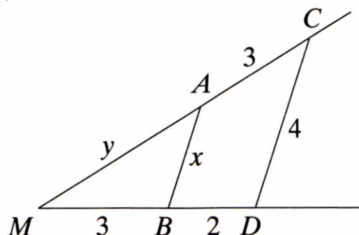
25. Trikampyje ABC nubrėžta atkarpa DE taip, kad
$\angle A = \angle BDE$.
Įrodykite, kad $\angle C = \angle BED$.



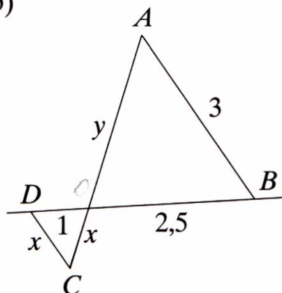
26. Lygiašonio trikampio vidaus kampų suma kartu su vienu priekampiu sudaro $330°$. Raskite trikampio vidaus kampus (du sprendiniai).

27. Raskite x ir y, jeigu $AB \parallel CD$:

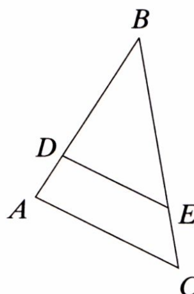
a)



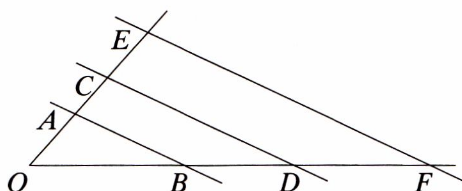
b)



28. Duota: $AB = 6\,\text{cm}$,
$BC = 9\,\text{cm}$,
$AD = 2\,\text{cm}$,
$DE \parallel AC$.
Rasti: BE ir EC.

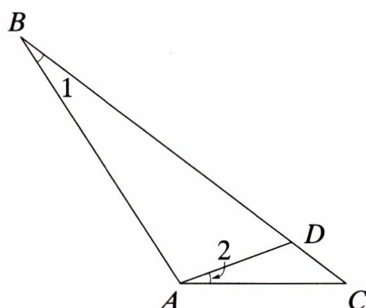


29. Duota: $AB \parallel CD \parallel EF$, $OA : AC : CE = 3 : 2 : 2{,}5$, $EF = 80\,\text{cm}$, $BD = 30\,\text{cm}$, $OC = 60\,\text{cm}$.
Rasti: OA, AC, CE, OB, DF, CD, AB.

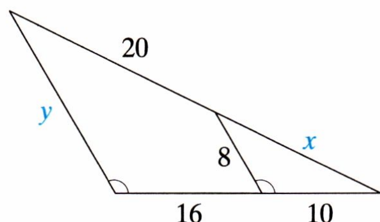


30. Trikampio kraštinės sutinka kaip $5 : 6 : 7$. Jo kraštinių vidurio taškai yra viršūnės kito trikampio, kurio perimetras lygus 36 cm. Raskite duotojo trikampio kraštinių ilgius.

31. Duota: $\angle 1 = \angle 2$, $AC = 10\,\text{cm}$, $BC = 25\,\text{cm}$.
Rasti: DC.



32. Pagal brėžinio duomenis raskite x ir y.



33. Ar panašūs trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$, kurių:

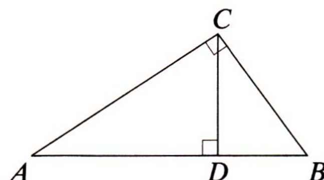
a) $\angle B = \angle B_1$, $AB = 12\,\text{cm}$, $BC = 16\,\text{cm}$, $A_1B_1 = 9\,\text{cm}$, $B_1C_1 = 12\,\text{cm}$;

b) $AB = 3{,}6\,\text{dm}$, $BC = 6\,\text{dm}$, $AC = 8{,}4\,\text{dm}$, $A_1B_1 = 1{,}5\,\text{dm}$, $B_1C_1 = 2{,}5\,\text{dm}$, $A_1C_1 = 3{,}5\,\text{dm}$?

34. Įrodykite, kad stačiojo trikampio aukštinė, nuleista iš stačiojo kampo viršūnės, yra geometrinis vidurkis atkarpų, į kurias ta aukštinė dalija įžambinę.

Duota: $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$), $CD \perp AB$.

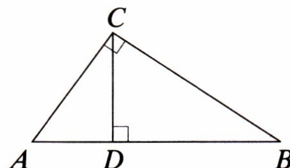
Įrodyti: $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$.



35. Įrodykite, kad stačiojo trikampio statinis yra įžambinės ir to statinio projekcijos įžambinėje geometrinis vidurkis.

Duota: $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$), $CD \perp AB$.

Įrodyti: $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$, $BC = \sqrt{AB \cdot BD}$.



Įvairūs uždaviniai

36. Įrodykite, jog su visais realiaisiais skaičiais galioja nelygybė $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

37. Apskaičiuokite:

a) $\frac{-1-|-3a|+4|b|}{2|a|+|b|}$, kai $a = -4$, $b = 0$;

b) $\frac{4-|-a|+2|b+1|}{|-a||b+3||b+1|}$, kai $a = 2$, $b = -4$;

c) $(-|-a|)^3 + 2|-b|^3$, kai $a = 1$, $b = 2$.

38. Iš kino teatro salės žiūrovai gali išeiti pro dvejas duris. Pro pirmąsias duris visi žiūrovai išeina per a min, o pro antrąsias — per b min. Per kiek minučių žiūrovai išeis iš salės pro abejas duris?

39. Suprastinkite reiškinį:

a) $\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right) : \left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$;

b) $\frac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}} : \frac{x^2y^2}{(x+y)^2+(x-y)^2}$;

c) $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}}{\sqrt{bc}+c}$.

40. Įrodykite, kad kai $-1 < x < 1$, tai reiškinys
$\left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4x}\right)$
įgyja tik neigiamas reikšmes.

41. Įrodykite, kad trupmena $\frac{n^3+2n}{n^2+1}$, kai $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$, yra nesuprastinama.

42. Suprastinkite:

a) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{3}$;

b) $\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2$;

c) $\left(\sqrt{5 + \sqrt{2}} - \sqrt{5 - \sqrt{2}}\right)^2$;

d) $\sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{5}$;

e) $5a^2b\sqrt{\frac{1}{a^3b}} - 2b\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{1}{b}\sqrt{4ab^3} + 3a^3\sqrt{\frac{b}{a^5}}$;

f) $\left(\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}\right)^2 - \left(\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}\right)^2$;

g) $\left(5 + \sqrt{2a+3}\right)^2 - \left(5 - \sqrt{2a+3}\right)^2$;

h) $\sqrt{(3m-1)^2} + \sqrt{(m-2)^2}$, $\frac{1}{3} \leqslant m \leqslant 2$.

43. Ar su visomis a ir b reikšmėmis galioja lygybė $\sqrt[6]{(a-b)^2} = \sqrt[3]{a-b}$?

44. Panaikinkite iracionalumą vardiklyje:

a) $\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$; b) $\frac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$.

45. Įrodykite, kad:

a) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}=4$;

b) $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geqslant 2$, kai $a \in \boldsymbol{R}$;

c) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2 \geqslant 0$, kai $a>0$, $b>0$.

Nurodymas. Pažymėkite $x=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

---

46. Išspręskite lygtį:

$\frac{x^2+4}{x^2-4}+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}=\frac{3x-2}{x^2-4}$.

47. Įrodykite, kad su visomis a, b ir $c \neq 0$ reikšmėmis lygtis $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2}$ turi sprendinių.

48. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} x^2-2x+xy-y+4=0, \\ y-3x-4=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+4y^2=13, \\ 2x^2-xy+y^2=22; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=7, \\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=91; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30, \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35. \end{cases}$

49. Išspręskite nelygybių sistemą:

a) $\begin{cases} |x| \geqslant 1, \\ |x-1|<3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-4<0, \\ x+1>0, \\ \frac{1}{2}-x>0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2x-9}{x^2-9}>1, \\ |x-3|<1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{3x+2}{x^2+3x}<-1, \\ |x-1|>3. \end{cases}$

50. Lygties $x^2-px+q=0$ sprendiniai yra x_1 ir x_2. Sprendinių kubų sumą $x_1^3+x_2^3$ išreikškite lygties koeficientais p ir q.

51. Išspręskite lygtį:

a) $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$;

b) $\sqrt{2x^2+5x-27}-\sqrt{2x^2+5x+12}=-3$;

c) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$.

52. Išspręskite nelygybę:

a) $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{x-3}{x+3} \geqslant 2$; b) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x-\frac{1}{x}\right)+3<0$; c) $x^2 \leqslant x^4$.

III Funkcijos



10. Funkcijos sąvoka

10.1. Funkcija ir jos reiškimo būdai

Ne tik matematikos, bet ir fizikos, chemijos, ekonomikos knygose galima rasti daug formulių, grafikų ir lentelių. Šiais būdais siekiama parodyti, kaip tarpusavyje susiję įvairūs dydžiai.

1 PAVYZDYS. Žinodami rutulio spindulį R, rutulio tūrį apskaičiuojame pagal formulę

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Dydis R čia gali įgyti bet kokias teigiamas reikšmes, o V reikšmė priklauso nuo R. Pavyzdžiui, kai $R = 1$, tai $V = \frac{4}{3}\pi$; kai $R = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ ($\approx 0{,}68$), tai $V = \frac{4}{3}$.

2 PAVYZDYS. Nustatykime, kiek skirtingų daliklių turi natūralusis skaičius $n = 8$. Patikrinę, iš kokių natūraliųjų skaičių dalijasi 8, randame daliklių skaičių: $d = 4$. Panašiai daliklių skaičių randame ir kitiems n. Apsiribokime natūraliaisiais skaičiais $1 \leqslant n \leqslant 10$ ir surašykime n ir d reikšmes į lentelę:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4

Abiejuose pavyzdžiuose vieną dydį (R ir n) keitėme, o kito dydžio (V ir d) ieškojome pagal tam tikrą taisyklę.

Pirmųjų dydžių reikšmes galėjome keisti, taigi R ir n — nepriklausomi kintamieji, o dydžių V ir d reikšmės priklauso nuo R ir n reikšmių, taigi V ir d yra priklausomi kintamieji.

Taisyklę, kuri kiekvienai vieno kintamojo reikšmei priskiria vienintelę kito kintamojo reikšmę, vadiname funkcija. Pirmąjį kintamąjį vadiname funkcijos nepriklausomu kintamuoju (arba argumentu), o antrąjį — priklausomu kintamuoju.
Aibę tų reikšmių, kurias gali įgyti nepriklausomas kintamasis, vadiname funkcijos apibrėžimo sritimi. Aibę tų reikšmių, kurias įgyja priklausomas kintamasis, — funkcijos reikšmių sritimi.

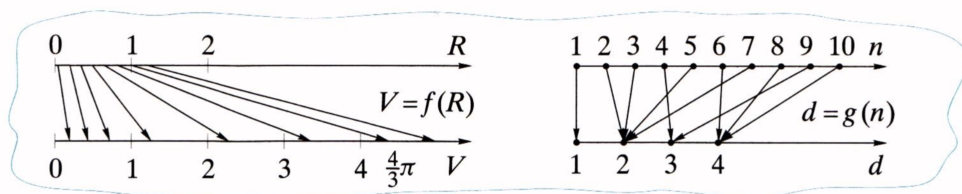
Jeigu x yra funkcijos nepriklausomas kintamasis, o y — priklausomas kintamasis, tai rašome $y = f(x)$. Raidė f yra tarsi priskyrimo taisyklės vardas. Dažnai patogu sakyti trumpai: y yra kintamojo x funkcija. Kai nėra būtina nurodyti, kaip pažymėtas priklausomas kintamasis, sakome: $f(x)$ yra funkcija. Aišku, kad vietoj f galima vartoti ir kitas raides. Pavyzdžiui, žymenys $u = g(v)$, $z = H(s)$, $y = l(x)$ reiškia, kad kintamieji u, z, y yra atitinkamų funkcijų priklausomi, o v, s, x — nepriklausomi kintamieji. Tą patį daiktą galime vadinti įvairiais vardais — dėl to jis nepasikeis. Funkcija irgi išliks ta pati — nesvarbu, kaip žymėsime jos kintamuosius. Pavyzdžiui, formulėmis $y = x^2$, $z = s^2$, $t = v^2$ apibrėžta ta pati funkcija.

Funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis kartais žymima D_f (arba $D(f)$), o reikšmių sritis — E_f (arba $E(f)$). Pavyzdžiui, pirmame pavyzdyje rutulio tūris V yra rutulio spindulio R funkcija, taigi $V = f(R)$, $D_f = (0; +\infty)$, $E_f = (0; +\infty)$.

Antrame pavyzdyje nagrinėjome funkciją $d = g(n)$; nepriklausomam kintamajam n suteikėme reikšmes $1, 2, \ldots, 10$ ir skaičiavome atitinkamas d — daliklių skaičiaus reikšmes. Taigi $D_g = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $E_g = \{1, 2, 3, 4\}$. Žinoma, šiame pavyzdyje galėjome neapsiriboti natūraliaisiais skaičiais iki 10. Jeigu nuspręstume, kad n gali įgyti reikšmes iš didesnės natūraliųjų skaičių aibės, tai ši aibė būtų funkcijos $d = g(n)$ apibrėžimo sritis.

1 užduotis. Pratęskite 2 pavyzdžio lentelę įrašydami daliklių skaičiaus $d = g(n)$ reikšmes, kai $n = 11, 12, \ldots, 20$. Gausite lentelę, kuri vaizduoja funkciją $g(n)$, apibrėžtą aibėje $D_g = \{1, \ldots, 20\}$. Kokia šios funkcijos reikšmių sritis?

Funkciją galima įsivaizduoti kaip atvaizdį, kuris apibrėžimo srities skaičius atvaizduoja į reikšmių srities skaičius. Skyrelio pavyzdžiuose nagrinėtas funkcijas galime pavaizduoti taip.



Jei $y = f(x)$, tai kintamojo x skaitinei reikšmei u priskiriamą kintamojo y reikšmę žymėsime $f(u)$. Pavyzdžiui, iš brėžinio matome: $f(1) = \frac{4}{3}\pi$, $g(8) = 4$ ir t. t.

Pirmajame pavyzdyje užrašėme rutulio tūrio formulę. Ji rodo, kad tūris V yra rutulio spindulio ilgio R funkcija. Šios funkcijos apibrėžimo sritis ir reikšmių sritis — teigiamų skaičių aibė. Jeigu nebūtų pasakyta, kad R — rutulio spindulio ilgis, taigi $R > 0$, galėtume ją nagrinėti su visomis R reikšmėmis, — tada turėtume funkciją, apibrėžtą visoje realiųjų skaičių aibėje.

Kai funkcija yra išreikšta formule ir nėra atskirai nurodyta, kokias reikšmes gali įgyti nepriklausomas kintamasis, sakome, kad funkcijos apibrėžimo sritį sudaro visos šio kintamojo reikšmės, su kuriomis formulės reiškinys turi prasmę.

2 užduotis. Raskite funkcijų $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$ apibrėžimo ir reikšmių sritis.

Kartais funkcijai apibrėžti panaudojami keli reiškiniai. Pavyzdžiui, visoje realiųjų skaičių aibėje apibrėžkime funkciją $f(x)$ taip:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ x^3, & \text{kai } x > 0. \end{cases}$$

Šios funkcijos apibrėžimo sritis — realiųjų skaičių aibė, reikšmių sritis — visų neneigiamųjų skaičių aibė.

Kartais funkciją galima apibrėžti žodžiais nusakant, kokios reikšmės priskiriamos nepriklausomo kintamojo reikšmėms.

3 PAVYZDYS. Apibrėžkime funkciją $y = f(x)$ visoje realiųjų skaičių aibėje taip: $f(x)$ yra didžiausias sveikas skaičius n, tenkinantis nelygybę $n \leqslant x$. Pavyzdžiui, $f(2{,}5) = 2$, $f(1{,}(21)) = 1$, $f(-3{,}1) = -4$ ir t.t. Ši funkcija žymima taip: $y = [x]$ ir vadinama skaičiaus sveikosios dalies funkcija.

3 užduotis. Raskite: $[\sqrt{2}]$, $[\pi]$, $[-1{,}2]$, $[-\sqrt{2}]$, $[-\pi]$.

Jeigu iš skaičiaus atimsime sveikąją jo dalį, liks trupmeninė. Trupmeninės skaičiaus dalies funkciją galime apibrėžti taip: $y = x - [x]$. Ši funkcija žymima $y = \{x\}$.

4 užduotis. Apskaičiuokite $\left\{\frac{3}{5}\right\}$, $\left\{\frac{25}{7}\right\}$, $\{1{,}(2)\}$, $\left\{-\frac{12}{7}\right\}$, $\{-4\}$.

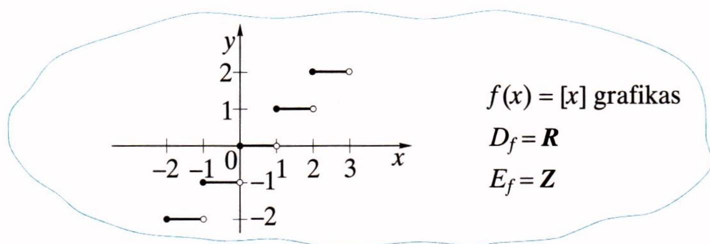
Suteikę funkcijos $y = f(x)$ kintamajam x reikšmę x_0 ir suradę $y_0 = f(x_0)$, pavaizduokime gautą skaičių porą plokštumos tašku $(x_0; y_0)$. Įsivaizduokime, kad nepriklausomam kintamajam x suteikėme visas galimas reikšmes, suskaičiavome $f(x)$ ir plokštumoje pavaizdavome visus taškus $(x; f(x))$. Gautoji taškų aibė vadinama funkcijos $y = f(x)$ grafiku.

APIBRĖŽIMAS
Funkcijos $y = f(x)$, kurios apibrėžimo sritis yra aibė X, grafiku vadinama koordinačių plokštumos taškų aibė $(x; f(x))$, $x \in X$.

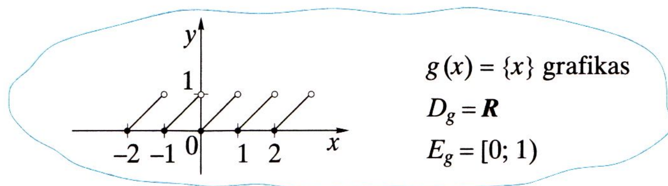
Dažnai funkcijos grafikas yra tam tikra plokštumos kreivė. Pavyzdžiui, funkcijos $y = ax + b$ (a, b — skaičiai) grafikas yra tiesė, funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c — skaičiai), kai $a \neq 0$, — parabolė.

Tačiau kartais funkcijos grafiką sudaro keli vienas su kitu nesujungti koordinačių plokštumos taškai. Pavyzdžiui, antrame pavyzdyje apibrėžtos funkcijos $d = g(n)$ grafiką sudaro dešimt koordinačių plokštumos taškų.

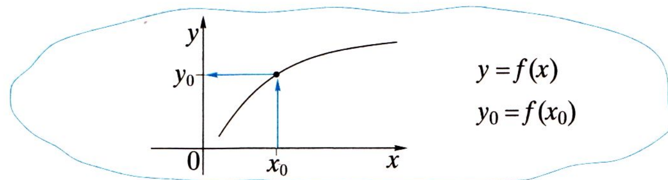
4 PAVYZDYS. Nubraižykime funkcijų $y = [x]$ ir $y = \{x\}$ grafikus.
Funkcijos $y = [x]$ apibrėžimo sritis — visų realiųjų skaičių aibė, reikšmių sritis — sveikųjų skaičių aibė. Kai $0 \leqslant x < 1$, tai $[x] = 0$, taigi šios funkcijos grafikui priklauso visi taškai $(x; 0)$, $x \in [0; 1)$. Kai $x \in [1; 2)$, tai $[x] = 1$. Taigi taškai $(x; 1)$, $x \in [1; 2)$ priklauso funkcijos grafikui.



Panašiai nagrinėdami trupmeninės dalies funkciją $y = \{x\}$ galime nubraižyti jos grafiką.

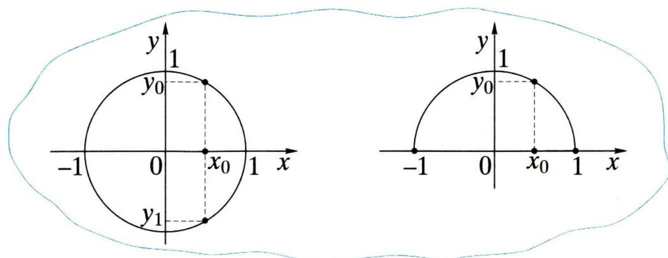


Jeigu koordinačių plokštumoje yra nubraižytas funkcijos $y = f(x)$ grafikas, tai pasinaudodami juo galime surasti (bent jau apytiksliai), kokios y reikšmės yra priskirtos skaitinėms x reikšmėms.



Kartais sakoma, kad funkcija yra apibrėžta grafiku. Tačiau ne kiekviena plokštumos kreivė yra kokios nors funkcijos grafikas.

Nubrėžkime, pavyzdžiui, apskritimą, kurio lygtis $x^2 + y^2 = 1$.



Pasirinkę x_0 reikšmę iš intervalo $(-1; 1)$ matome, kad apskritime yra du taškai, turintys tą pačią abscisę x_0. Taigi apskritimas nėra jokios funkcijos grafikas, t. y. neapibrėžia jokios funkcijos. Tačiau jeigu nubrėžtume tik pusę apskritimo, esančią virš Ox ašies, tai galėtume sakyti, kad ši kreivė yra funkcijos, apibrėžtos intervale $[-1; 1]$, grafikas.

5 užduotis. Užrašykite formule funkciją, kurios grafikas yra apskritimo $x^2 + y^2 = 1$ pusė, esanti virš Ox ašies.

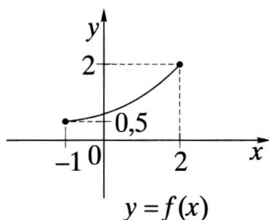
Apsižvalgykite aplinkui ir įsitikinsite, kad gyvename įvairiausių priskyrimo taisyklių, t.y. funkcijų, pasaulyje:

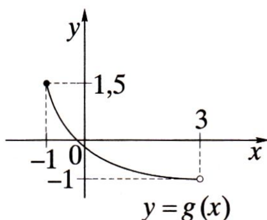
- *kiekvienai prekei parduotuvėje yra priskirta kaina;*
- *kiekvienam moksleiviui metų gale priskiriamas metinis matematikos pažymys;*
- *po rinkimų kiekvienam kandidatui į prezidentus priskiriamas rinkėjų balsų skaičius;*
- ....

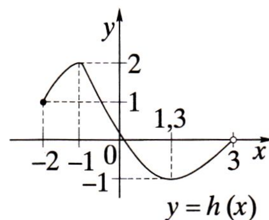
Tačiau tik matematikoje funkcijos apibrėžiamos taip trumpai ir aiškiai, kad niekam nekyla noras ginčytis!

Pratimai ir uždaviniai

1. Funkcijos $f(x)$, $g(x)$ ir $h(x)$ apibrėžtos grafikais. Nustatykite šių funkcijų apibrėžimo ir reikšmių sritis.







2. Sudarykite formule išreikštos funkcijos reikšmių lentelę. (Imkite tik sveikąsias x reikšmes.) Po to nubraižykite funkcijos grafiką. Raskite funkcijos reikšmių sritį.

a) $f(x) = 5x - 8,\ 0 \leqslant x \leqslant 4$;

b) $f(x) = x - x^2,\ -3 \leqslant x \leqslant 3$;

c) $f(x) = \frac{6}{x-4},\ -6 \leqslant x \leqslant 0$;

d) $f(x) = \frac{1}{1-x},\ x \geqslant 2$.

3. Užpildykite lentelę įrašydami langeliuose nurodytų funkcijų reikšmes:

$x =$	2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{a}{3}$	$a+1$
$f(x) = (x-2)^3$					
$f(x) = x^3 + 3x - 1$					
$f(x) = 3x^2 - 5x + 7$					

4. Apskaičiuokite funkcijos $f(x)$ reikšmes $f(3)$, $f(-5)$, $f(0)$, kai:

a) $f(x) = |x| - x$; b) $f(x) = x \cdot |-x|$.

5. Funkcijos $f(x)$ reikšmė lygi skaičiaus x antrajam dešimtainiam ženklui po kablelio. Nurodykite šios funkcijos reikšmių sritį. Apskaičiuokite:

a) $f(2{,}34)$; b) $f(\pi)$; c) $f(\sqrt{3})$; d) $f(6)$; e) $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

6. Tegu x yra taisyklingojo n-kampio kraštinės ilgis, o S — plotas. Tada S yra kintamojo x funkcija: $S = f(x)$. Užrašykite šią funkciją formule, kai $n = 3, 4, 6$.

7. Funkcija apibrėžta formule $f(x) = ax + b$. Raskite a ir b, kai:

a) $f(0) = -7$ ir $f(3) = 2$; b) $f(-2) = 14$ ir $f(0) = 6$.

8. Funkcija apibrėžta formule $f(x) = ax^2 + bx + c$. Raskite a, b ir c, kai:

a) $f(0) = 0,\ f(1) = 5,\ f(-2) = 26$;
b) $f(0) = -7,\ f(-1) = 13,\ f(2) = -19$.

9. Apie apskritimą apibrėžtas kvadratas. Užrašykite formule funkciją, kurios nepriklausomas kintamasis yra apskritimo spindulio ilgis, o priklausomas — kvadrato kraštinės ilgis.

10. Apie kvadratą apibrėžtas apskritimas. Užrašykite formule funkciją, kurios nepriklausomas kintamasis yra apskritimo spindulio ilgis, o priklausomas — kvadrato kraštinės ilgis.

11. Apskaičiuokite $f(0)$, $f(-2)$, $f(2)$, kai:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geqslant -1, \\ 1 + x^2, & x < -1; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} |x|, & x > 1, \\ 4 - x, & x \leqslant 1; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{7}{x+1}, & x > -1, \\ \frac{x+1}{7}, & x \leqslant -1; \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & |x| < 2, \\ 2 - x^2, & |x| \geqslant 2. \end{cases}$

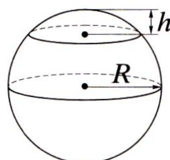
12. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką, jei:

a) $f(x) = x - 1$; b) $f(x) = x^2 - 1$; c) $f(x) = -2x^2 + 5$.

13. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką, jei:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kai } x \geqslant 0, \\ 2, & \text{kai } x < 0; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{kai } x \geqslant 0, \\ x, & \text{kai } x < 0. \end{cases}$

14. Rutulio nuopjovos tūris apskaičiuojamas pagal formulę:
$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$, kai $0 \leqslant h \leqslant 2R$;
čia R — rutulio spindulio ilgis,
h — nuopjovos aukštinės ilgis.



Raskite rutulio nuopjovos tūrį, kai: a) $h = 5$, $R = 8$; b) $h = 8$, $R = 5$.

15. Funkcijos $f(x) = x^2$ reikšmių sritis priklauso nuo to, su kokiomis x reikšmėmis šią funkciją nagrinėjame, t. y. nuo apibrėžimo srities. Raskite šios funkcijos reikšmių sritį, kai apibrėžimo sritis yra intervalas:

a) $[0; 3]$; b) $[-1; 1]$; c) $[-2; 4]$.

16. Koordinačių plokštumoje nubraižykite kreivę, kuri būtų funkcijos $f(x)$, apibrėžtos intervale $[-2; 2]$, grafikas, jeigu funkcija tenkina šias sąlygas:

a) $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$; b) $f(x) \geqslant 3$ ir $f(x) \leqslant -3$.

17. Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ reikšmes:

$f(1)$, $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(-\frac{1}{4}\right)$, $f(a)$, $f\left(\frac{1}{a}\right)$, $f\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$.

18. Raskite funkcijos apibrėžimo sritį:

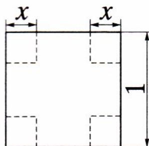
a) $f(x) = x + 2$; b) $f(x) = \frac{x+2}{x}$; c) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$;

d) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+2}$; e) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$; f) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$;

g) $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$; h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$; i) $f(x) = \frac{5x-4}{x^2-7x+6}$;

j) $f(x) = \frac{1-8x}{x^2-5x+6}$; k) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2-4}}$; l) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{16-x^2}}$.

19. Iš kvadrato formos lapo išpjauti keturi vienodi kvadratėliai. Iš likusios dalies padaryta dėžutė. Tegu x — kvadratėlių kraštinių ilgis, V — dėžutės tūris. Išreikškite kintamąjį V kintamuoju x. Raskite gautos funkcijos apibrėžimo sritį.



20. Funkcijos $f(x) = -x^2 + 4$ apibrėžimo sritis — visa realiųjų skaičių aibė. Nubraižykite funkcijos grafiką ir raskite jos reikšmių sritį. Kokia būtų funkcijos $f(x) = -x^2 + 4$ reikšmių sritis, jeigu funkciją nagrinėtume intervale:
a) $[0; 3]$; b) $[-5; -1]$; c) $[-2; 2]$?

21. Duota funkcija $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$. Raskite:
a) funkcijos apibrėžimo sritį;
b) funkcijos reikšmes, kai $x = -6; 0; 4$.

Su kokiomis x reikšmėmis teisingos lygybės:
$f(x) = 3$, $f(x) = -\frac{1}{2}$, $f(x) = 1$?

22. Duota funkcija $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$. Raskite:
a) funkcijos apibrėžimo sritį;
b) funkcijos reikšmes, kai $x = 4; 12; 18$.

Su kokiomis x reikšmėmis teisingos lygybės:
$f(x) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x) = 2\frac{1}{3}$?

23. Apskaičiuokite:

a) $[3{,}7] + [2{,}4] - [6{,}7]$; b) $[2{,}3] + [-2{,}3]$; c) $[13{,}5] \cdot [-0{,}5]$;

d) $\{3{,}7\} + \{2{,}4\} - \{6{,}7\}$; e) $\{2{,}3\} + \{-2{,}3\}$; f) $\{\frac{1}{5}\} \cdot \{5\frac{1}{3}\}$.

24. Skaičių užrašykite sveikosios dalies ir trupmeninės dalies suma:

a) $20{,}4$; b) $0{,}32$; c) $-4{,}5$; d) $14{,}3$; e) $-14{,}3$; f) $-0{,}48$;

g) $-1{,}(2)$; h) $\frac{13}{5}$; i) $-\frac{17}{8}$; j) $\sqrt{2}$; k) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; l) π.

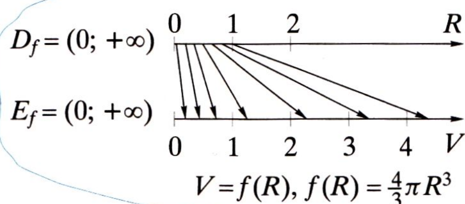
Pavyzdys. $\left[\frac{3}{2}\right] = 1$, $\{\frac{3}{2}\} = \frac{1}{2}$; $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$.

---

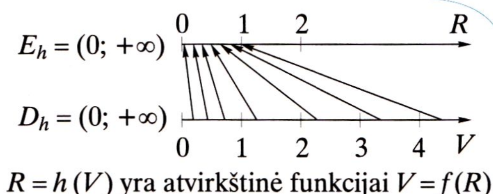
25. Funkcijos $f(n) = 4n - 3$ apibrėžimo sritis — sveikųjų skaičių aibė. Apskaičiuokite sumą $f(-15) + f(-14) + \cdots + f(14) + f(15) + f(16)$.

10.2. Atvirkštinė funkcija

Pirmame 10.1 skyrelio pavyzdyje nagrinėjome funkciją, kurios nepriklausomas kintamasis yra rutulio spindulio ilgis R, o priklausomas kintamasis — rutulio tūris V: $V = f(R)$. Žinodami rutulio tūrį V galime surasti ir rutulio spindulio ilgį R; kelių galimybių čia būti negali, nes rutulių su skirtingais spindulių ilgiais tūriai taip pat skirtingi. Todėl galime nagrinėti taisyklę, kuri rutulio tūriui V priskiria rutulio spindulio ilgį R, taigi galime apibrėžti funkciją $R = h(V)$. Ją vadinsime funkcija, atvirkštine funkcijai $V = f(R)$.



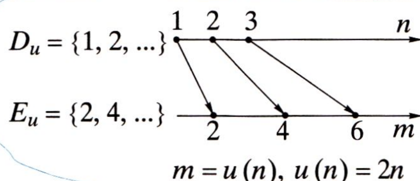
$V = f(R)$, $f(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$



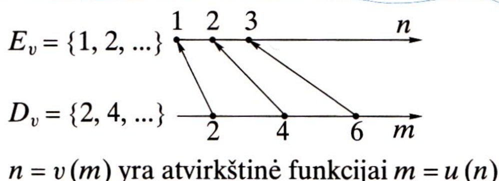
$R = h(V)$ yra atvirkštinė funkcijai $V = f(R)$

1 užduotis. Remdamiesi tuo, kad $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, išreikškite funkciją $R = h(V)$ formule.

Natūraliųjų skaičių aibėje apibrėžkime funkciją $m = u(n)$, $u(n) = 2n$. Jos reikšmių aibę sudaro visi teigiami lyginiai skaičiai. Žinodami m reikšmę galime surasti ir n. Taigi ir šiuo atveju galime apibrėžti funkciją $n = v(m)$, atvirkštinę funkcijai $m = u(n)$.

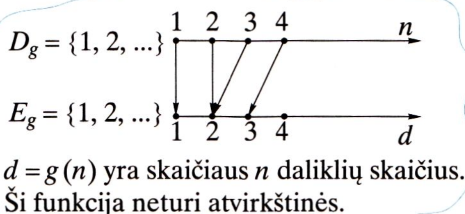


$m = u(n)$, $u(n) = 2n$

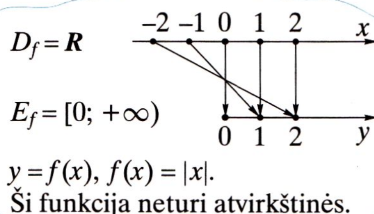


$n = v(m)$ yra atvirkštinė funkcijai $m = u(n)$

O dabar prisiminkime 10.1 skyrelyje nagrinėtą funkciją $d = g(n)$, čia d yra natūraliojo skaičiaus n daliklių skaičius. Žinodami, pavyzdžiui, kad n turi du daliklius, t. y. $g(n) = 2$, negalėtume pasakyti, kam lygus skaičius n. Juk gali būti ir $n = 2$ ir $n = 3$ ir t. t. Taigi negalima apibrėžti taisyklės, kuri kiekvienai d reikšmei priskirtų *vieną* n reikšmę. Funkcija $d = g(n)$ atvirkštinės neturi. Atvirkštinės funkcijos neturi ir, pavyzdžiui, funkcija $y = |x|$.



$d = g(n)$ yra skaičiaus n daliklių skaičius.
Ši funkcija neturi atvirkštinės.



$y = f(x)$, $f(x) = |x|$.
Ši funkcija neturi atvirkštinės.

APIBRĖŽIMAS

Tegu funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritis yra aibė X, o reikšmių sritis — aibė Y, be to, ši funkcija skirtingoms x reikšmėms priskiria skirtingas y reikšmes. Taisyklė, kuri kiekvienai reikšmei $y \in Y$ priskiria reikšmę $x \in X$, su kuria $f(x) = y$, vadinama funkcija, atvirkštine funkcijai $f(x)$.

Jei funkcija $y = f(x)$ turi atvirkštinę, tai kintamasis y yra atvirkštinės funkcijos nepriklausomas kintamasis, o x — priklausomas kintamasis, todėl atvirkštinę funkciją galima žymėti taip: $x = g(y)$. Tačiau kintamuosius galime žymėti ir kitaip, funkcija (reikšmių priskyrimo taisyklė) išliks ta pati.

1 PAVYZDYS. Suraskime funkcijos $y = 2x + 1$ atvirkštinę funkciją.
Atvirkštinė funkcija y reikšmėms priskiria x reikšmes, todėl atvirkštinę funkciją surasime išreiškę x kintamuoju y:

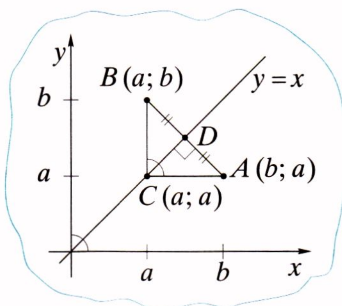
$$2x = y - 1, \quad x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}.$$

Taigi funkcija $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ yra atvirkštinė funkcijai $y = 2x + 1$. Tą patį galima pasakyti ir kitaip: funkcijos $f(x) = 2x + 1$ atvirkštinė funkcija yra $g(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$. Tačiau tą pačią funkciją (priskyrimo taisyklę) galima užrašyti naudojant įvairius žymenis. Jei nepriklausomą funkcijos $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ kintamąjį pažymėsime t, o priklausomą — s, tai šią funkciją galėsime užrašyti taip: $s = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$. Tačiau geriau nepriklausomą kintamąjį, kaip įprasta, žymėkime x, o priklausomą — y. Taigi funkcijos $y = 2x + 1$ atvirkštinė yra $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, arba — funkcijos $f(x) = 2x + 1$ atvirkštinė yra funkcija $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

2 užduotis. Raskite funkcijos $f(x) = 3x + 1$ atvirkštinę funkciją. Nubraižykite abiejų funkcijų grafikus.

Tarkime, funkcija $y = f(x)$ turi atvirkštinę funkciją $y = g(x)$. Abiejų funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus galima nubraižyti toje pačioje koordinačių plokštumoje. Tegu $x = a$ ir $b = f(a)$. Kadangi $(a; b)$ yra funkcijos $y = f(x)$ grafiko taškas, tai $(b; a)$ yra atvirkštinės funkcijos $y = g(x)$ grafiko taškas. Atidėkime šiuos taškus toje pačioje koordinačių plokštumoje. Panagrinėkime atvejį $0 \leqslant a < b$.

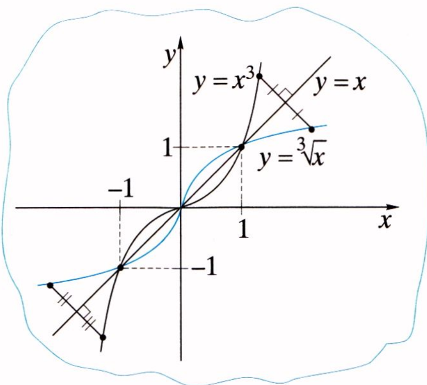
Iš brėžinio matyti, kad tiesė $y = x$, einanti per taškus $(0; 0)$ ir $(a; a)$, dalija lygiašonio trikampio ABC statųjį kampą pusiau. Vadinasi, ši tiesė yra statmena AB ir dalija šią atkarpą pusiau, nes lygiašonio trikampio pusiaukampinė yra ir aukštinė, ir pusiaukraštinė. Taigi $AD = BD$ ir AB statmena CD. Taškai $(a; b)$ ir $(b; a)$ yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu.



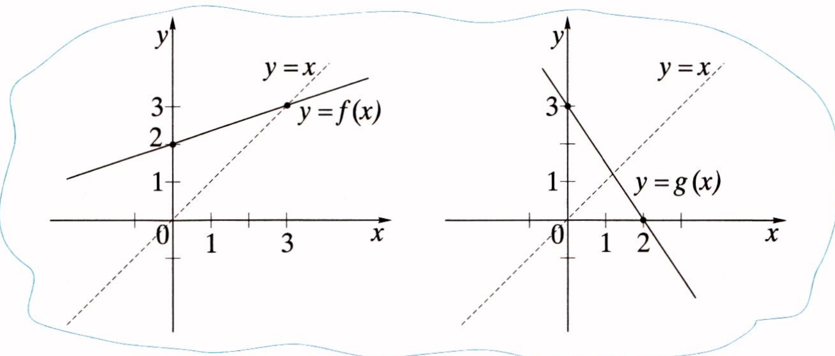
3 užduotis. Įrodykite, kad taškai $(a; b)$ ir $(b; a)$, kai $a < 0$, $b > 0$, yra taip pat simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu.

Jei funkcija $f(x)$ turi atvirkštinę funkciją $g(x)$, tai kiekvieną $f(x)$ grafiko tašką atitinka tiesės $y = x$ atžvilgiu simetriškas funkcijos $g(x)$ grafiko taškas.
Funkcijos ir jai atvirkštinės funkcijos grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu.

2 PAVYZDYS. Funkcijos $y = x^3$ atvirkštinė yra funkcija $y = \sqrt[3]{x}$. Todėl šios funkcijos grafiką galima braižyti taip: nubraižę funkcijos $y = x^3$ grafiką ir atidėję taškus, simetriškus tiesės $y = x$ atžvilgiu, gauname $y = \sqrt[3]{x}$ grafiką.



4 užduotis. Koordinačių plokštumoje nubrėžtos tiesės yra funkcijų $y = f(x)$, $y = g(x)$ grafikai.



Nubraižykite šioms funkcijoms atvirkštinių funkcijų grafikus. Užrašykite funkcijas $f(x)$, $g(x)$ ir jų atvirkštines formulėmis.

Pratimai ir uždaviniai

26. Ar šios funkcijos yra viena kitai atvirkštinės:

a) $f(x) = -x^3$ ir $g(x) = -\sqrt[3]{x}$; b) $f(x) = x^5$ ir $g(x) = \sqrt[5]{x}$;

c) $f(x) = x^{-3}$ ir $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; d) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ ir $g(x) = x\sqrt[3]{x^2}$?

27. Raskite nurodytos funkcijos atvirkštinę funkciją ir nubraižykite duotosios ir jai atvirkštinės funkcijų grafikus:

a) $f(x) = 3x + 1$; b) $f(x) = 2 - x$; c) $f(x) = x^2 + 1$ $(x \leqslant 0)$;

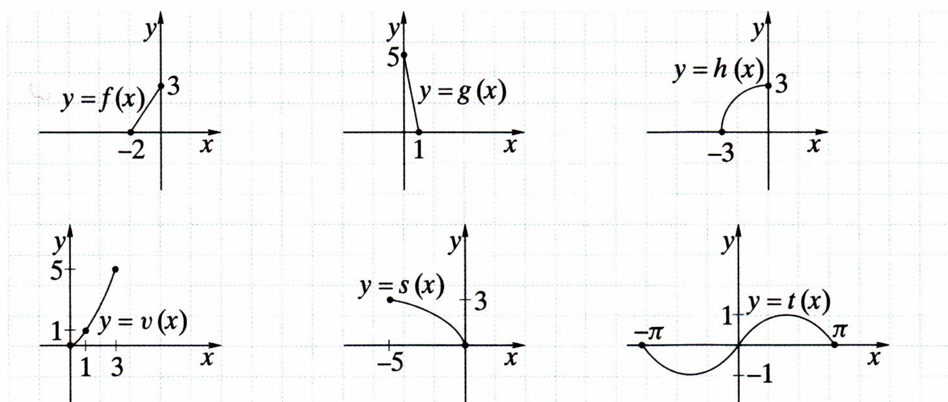
d) $f(x) = \sqrt{x+1}$ $(x \geqslant -1)$; e) $f(x) = -x^3$; f) $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

28. Raskite funkciją, atvirkštinę funkcijai:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$, $D_f = (-\infty; 3]$;

b) $f(x) = x^2 - 8x + 16$, $D_f = [4; +\infty)$.

29. Funkcijų $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $v(x)$, $s(x)$, $t(x)$ grafikai pavaizduoti brėžinyje:



a) Nustatykite, kurios funkcijos turi atvirkštines, ir nubraižykite atitinkamus atvirkštinių funkcijų grafikus.

b) Nurodykite funkcijų ir joms atvirkštinių funkcijų (jei jos yra) apibrėžimo ir reikšmių sritis.

30. Raskite funkcijos $f(x)$ atvirkštinę funkciją bei jų abiejų apibrėžimo ir reikšmių sritis, jei:

a) $f(x) = 2x - 1$; b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$;

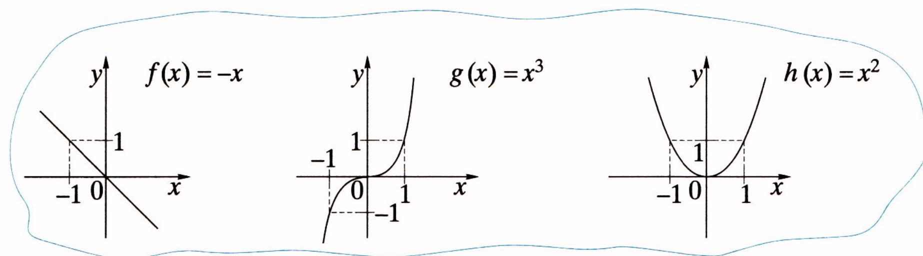
c) $f(x) = x^2 + 4$ $(x \geqslant 0)$; d) $f(x) = -x^2 - 4$ $(x \leqslant 0)$;

e) $f(x) = -x^{\frac{1}{2}}$; f) $f(x) = x^{\frac{7}{3}}$;

g) $f(x) = (x - 1)^3$; h) $f(x) = \frac{3}{x-4}$.

10.3. Didėjančios ir mažėjančios funkcijos

Pažvelkime į brėžinį, kuriame pavaizduoti trijų funkcijų grafikai. Visos funkcijos apibrėžtos toje pačioje apibrėžimo srityje (visoje realiųjų skaičių aibėje), bet jų reikšmės, kintant argumento reikšmėms, kinta skirtingai.



Pirmosios funkcijos reikšmės, didėjant kintamojo x reikšmėms, mažėja, antrosios — didėja. Trečiosios funkcijos reikšmės, didėjant x reikšmėms, gali ir mažėti, ir didėti.

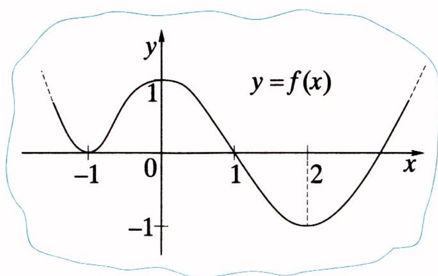
APIBRĖŽIMAS
Tegu intervalas I priklauso funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sričiai.
Jeigu iš nelygybės $x_1 < x_2$ ($x_1 \in I$, $x_2 \in I$) išplaukia nelygybė $f(x_1) < f(x_2)$, tai sakoma, kad funkcija $f(x)$ didėja intervale I.
Jeigu iš nelygybės $x_1 < x_2$ ($x_1 \in I$, $x_2 \in I$) išplaukia nelygybė $f(x_1) > f(x_2)$, tai sakoma, kad funkcija $f(x)$ mažėja intervale I.

Jeigu funkcija didėja intervale I, tai didesnę argumento reikšmę atitinka didesnė funkcijos reikšmė; jeigu funkcija mažėja intervale I, tai didesnę argumento reikšmę atitinka mažesnė funkcijos reikšmė.

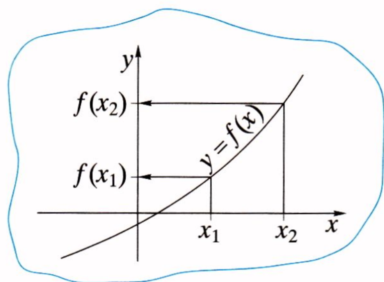
Jeigu funkcija didėja atvirame intervale I, tai šį intervalą vadinsime funkcijos didėjimo, jei mažėja — mažėjimo intervalu.

Pavyzdžiui, funkcija $h(x) = x^2$ mažėja intervale $(-\infty; 0)$ ir didėja intervale $(0; +\infty)$, taigi $(-\infty; 0)$ yra mažėjimo, o $(0; +\infty)$ — didėjimo intervalas. Funkcija $f(x) = -x$ mažėja visoje apibrėžimo srityje $(-\infty; +\infty)$, taigi $(-\infty; +\infty)$ yra jos mažėjimo intervalas. Funkcijai $g(x) = x^3$ intervalas $(-\infty; +\infty)$ yra didėjimo intervalas.

Užduotis. Brėžinyje pavaizduotas funkcijos $f(x)$ grafikas. Užrašykite funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus.



Tarkime, kad funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritis yra intervalas I ir šiame intervale funkcija didėja.



Pasirinkę du skirtingus skaičius $x_1 \in I$ ir $x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, gausime $f(x_1) < f(x_2)$, t. y. $f(x_1) \neq f(x_2)$. Taigi didėjanti funkcija skirtingoms argumento x reikšmėms priskiria skirtingas y reikšmes. Tačiau tuomet funkcija turi atvirkštinę.

Atvirkštinę turi ir savo apibrėžimo srityje mažėjanti funkcija.

Funkcijas, kurios yra apibrėžtos intervaluose ir savo apibrėžimo srityse mažėja, bei funkcijas, kurios apibrėžtos intervaluose ir savo apibrėžimo srityse didėja, vadiname monotoninėmis. Kiekviena monotoninė funkcija turi atvirkštinę.

Apibrėždami funkciją nurodome jos apibrėžimo sritį ir taisyklę, priskiriančią nepriklausomo kintamojo reikšmėms priklausomo kintamojo reikšmes. Su ta pačia taisykle nurodydami skirtingas apibrėžimo sritis apibrėžiame skirtingas funkcijas. Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = x^2$ su apibrėžimo sritimi $(-\infty; 0)$ yra mažėjanti, todėl turi atvirkštinę funkciją. Funkcija $f(x) = x^2$ su apibrėžimo sritimi $(-\infty; +\infty)$ nėra nei mažėjanti, nei didėjanti. Ji atvirkštinės funkcijos neturi.

Pratimai ir uždaviniai

31. Nustatykite, kurios iš funkcijų yra didėjančios arba mažėjančios:

a) $f(x) = 4x - 12$; b) $f(x) = -6x + 2$;
c) $f(x) = 8 - x$; d) $f(x) = 23 + 5x$.

32. Nubraižykite funkcijos grafiką ir užrašykite jos didėjimo ir mažėjimo intervalus:

a) $f(x) = -x^2$; b) $f(x) = 2x^2$; c) $f(x) = x - 1$; d) $f(x) = 1 - x$;
e) $f(x) = \sqrt{x}$; f) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; g) $f(x) = \sqrt[4]{x}$; h) $f(x) = -\sqrt[4]{x}$.

33. Koordinačių plokštumoje nubrėžkite kreivę, kuri būtų:
a) kokios nors intervale $(-\infty; 4]$ didėjančios, o intervale $[4; +\infty)$ mažėjančios funkcijos grafikas;
b) intervaluose $[-1; 4]$ ir $[6; +\infty)$ didėjančios, o intervaluose $(-\infty; -1]$ ir $[4; 6]$ mažėjančios funkcijos grafikas.

34. Nustatykite, su kuriomis x reikšmėmis funkcijos reikšmės lygios nuliui:

a) $f(x) = 2x - 15$; b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - x$; c) $h(x) = \frac{6}{x-1}$;

d) $t(x) = (x+2)(x-3)$; e) $f(x) = \frac{5+x}{5+x^2}$; f) $f(x) = \frac{x-8}{x}$.

35. Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos $y = f(x)$ reikšmės lygios nuliui; su kuriomis yra teigiamos (neigiamos), kai:

a) $f(x) = 10x + 28$; b) $f(x) = -15x + 7$; c) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$;

d) $f(x) = \frac{x^2+x+4}{2x-1}$; e) $f(x) = |x| - 1$; f) $f(x) = |x+1| - 3$?

36. Palyginkite $f(3)$ ir $f(-3)$, kai:
a) $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$; b) $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$; c) $f(x) = \frac{-x}{x^2+4}$.

37. Kurios iš funkcijų visoje apibrėžimo srityje įgyja tik teigiamas arba tik neigiamas reikšmes:

a) $f(x) = x^2$; b) $f(x) = x^2 + 5$; c) $f(x) = 2x + 5$;

d) $f(x) = -\sqrt{x} - 1$; e) $f(x) = -2 - \sqrt{x}$; f) $f(x) = \sqrt{-2x}$?

38. Funkcija išreikšta formule: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Ar jos grafikas kerta ašis Ox ir Oy? Kuriuose koordinatiniuose ketvirčiuose yra šios funkcijos grafikas?

39. Kuri iš nurodytų funkcijų yra funkcijos $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ atvirkštinė?

A $g(x) = 1 - \frac{2}{x-1}$

B $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$

C $k(x) = \frac{x-1}{1-x}$

40. Kuri iš nurodytų funkcijų yra funkcijos $f(x) = 2 - \frac{1}{x-3}$ atvirkštinė?

A $g(x) = \frac{1-3x}{x}$

B $h(x) = 3 + \frac{1}{2-x}$

C $k(x) = \frac{-3x-5}{2-x}$

41. Degdama žvakė per valandą sutrumpėja 2 cm. Pradinis žvakės ilgis lygus 20 cm.
1) Raskite žvakės ilgį l po t valandų.
2) Žvakės ilgis l yra degimo laiko funkcija: $l = f(t)$. Nustatykite šios funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis, nubraižykite grafiką.
3) Raskite funkcijos $l = f(t)$ atvirkštinę funkciją $t = g(l)$.
4) Raskite funkcijos $t = g(l)$ apibrėžimo ir reikšmių sritis, nubraižykite grafiką.

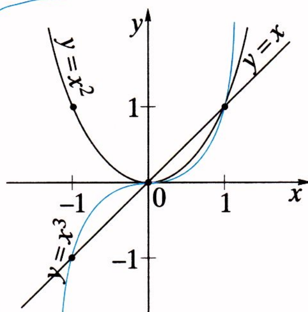
42. Kūnas mestas aukštyn pradiniu greičiu v_0. Tada jo greitis po t laiko vienetų lygus $v(t) = v_0 - gt$. Užrašykite funkciją, kuri leistų žinant kūno greitį apskaičiuoti, kiek laiko kūnas lekia.

11. Laipsninė funkcija

Šiame skyriuje nagrinėsime funkcijas, kurios apibrėžiamos remiantis skaičių kėlimo laipsniais bei šaknies traukimo veiksmais. Tokios funkcijos vadinamos laipsninėmis ir užrašomos formulėmis $y = x^r$ bei $y = \sqrt[n]{x}$. Laipsninės funkcijos $y = x^r$ apibrėžimo sritis priklauso nuo laipsnio rodiklio r. Pavyzdžiui, funkcija $y = x^3$ apibrėžta visiems x, o $y = x^{-3}$ — visiems $x \neq 0$. Funkcijos $y = \sqrt[n]{x}$ apibrėžimo sritis irgi priklauso nuo šaknies laipsnio n. Pavyzdžiui, funkcija $y = \sqrt[3]{x}$ apibrėžta su visomis x reikšmėmis, o $y = \sqrt[4]{x}$ — tik su neneigiamomis.
Laipsninėmis funkcijomis reiškiami įvairių dydžių sąryšiai. Pavyzdžiui, laipsnine funkcija reiškiama judančio kūno kinetinės energijos priklausomybė nuo greičio $E = mv^2$, svyruoklės periodo priklausomybė nuo svyruoklės ilgio $T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{l}$.

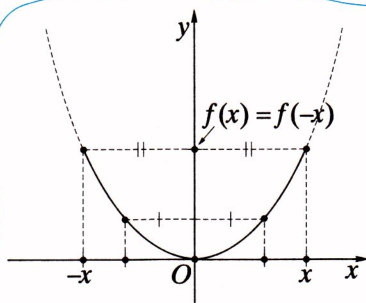
11.1. Laipsninė funkcija su sveikuoju rodikliu

Funkcija $f(x) = x^n$, kai $n = 1, 2, \ldots$, apibrėžta su visais x. Funkcijos $f(x) = x$ grafikas yra tiesė, funkcijos $f(x) = x^2$ — parabolė, $f(x) = x^3$ — kubinė parabolė.



Funkcijos $y = x^2$ savybės būdingos visoms funkcijoms $y = x^{2n}$; funkcijos $y = x^3$ savybės — visoms funkcijoms $y = x^{2n-1}$, čia n — natūralusis skaičius.

Prisiminkime vieną funkcijos $f(x) = x^2$ savybę. Su kiekviena x reikšme teisingos lygybės $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, t. y. $f(-x) = f(x)$. Tai reiškia, kad funkcijos $f(x) = x^2$ grafiko taškų $(x; f(x))$ ir $(-x; f(-x))$ ordinatės tos pačios. Taigi kiekvieną šios funkcijos grafiko tašką atvaizdavę simetriškai tiesės Oy atžvilgiu, vėl gauname grafiko tašką. Todėl funkcijos $y = x^2$ grafikas yra kreivė, simetriška ašies Oy atžvilgiu. Šią savybę turi visos laipsninės funkcijos $f(x) = x^{2n}$ $(n \in \boldsymbol{N})$.



Funkcijos $f(x) = x^2$ grafikas simetriškas tiesės Oy atžvilgiu.

APIBRĖŽIMAS

Funkcija $f(x)$ vadinama lygine, jei su visais x iš apibrėžimo srities teisinga lygybė $f(-x) = f(x)$.

Bet kokios lyginės funkcijos grafikas yra simetriškas tiesės Oy atžvilgiu.

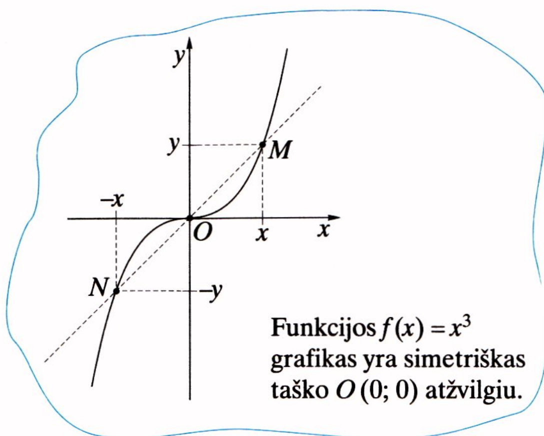
Taigi funkcija $f(x) = x^{2n}$ $(n \in \boldsymbol{N})$ yra lyginė. Iš tikrųjų, kadangi su bet kuria x reikšme teisinga lygybė

$$(-x)^{2n} = (-1)^{2n}x^{2n} = x^{2n}, \text{ tai } f(-x) = f(x).$$

Dabar panagrinėkime funkciją $f(x) = x^3$. Įstatę į funkcijos formulę $-x$ vietoj x gausime

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3x^3 = -x^3, \text{ taigi } f(-x) = -f(x).$$

Vadinasi, funkcijos $f(x) = x^3$ grafiko taškų $(x; f(x))$ ir $(-x; f(-x))$ ordinatės skiriasi tik ženklu: jei $f(x) = y$, tai $f(-x) = -y$. Atidėję taškus $M(x; y)$ ir $N(-x; -y)$ koordinačių plokštumoje ir panagrinėję brėžinį įsitikinsime, kad taškai $M(x; y)$, $O(0; 0)$ ir $N(-x; -y)$ yra vienoje tiesėje, be to, $OM = ON$. Todėl taškai M ir N yra simetriški taško O atžvilgiu. Bet kurį funkcijos $f(x) = x^3$ grafiko tašką atvaizdavę simetriškai O atžvilgiu vėl gauname grafiko tašką. Sakome, kad $f(x) = x^3$ grafikas yra kreivė, simetriška koordinačių pradžios $O(0; 0)$ atžvilgiu. Šią savybę turi visos laipsninės funkcijos $f(x) = x^{2n-1}$ $(n \in \boldsymbol{N})$.



Funkcijos $f(x) = x^3$ grafikas yra simetriškas taško $O(0; 0)$ atžvilgiu.

APIBRĖŽIMAS

Funkcija $f(x)$ vadinama nelygine, jei su visais x iš apibrėžimo srities teisinga lygybė $f(-x) = -f(x)$.

Bet kokios nelyginės funkcijos grafikas yra simetriškas taško $O(0; 0)$ atžvilgiu.

Įsitikinome, kad funkcija $f(x) = x^3$ $(n \in \boldsymbol{N})$ yra nelyginė.

1 užduotis. Įrodykite, kad kiekviena laipsninė funkcija $y = x^{2n-1}$ $(n \in \boldsymbol{N})$ yra nelyginė.

Dauguma funkcijų nėra nei lyginės, nei nelyginės. Jeigu nustatę funkcijos apibrėžimo sritį matome, kad ji nėra simetriška nulio atžvilgiu, tai iš karto galime teigti, kad funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė. Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = \frac{1}{x+1}$ nėra nei lyginė, nei nelyginė, nes ji apibrėžta, kai $x = 1$, bet neapibrėžta, kai $x = -1$. Jei funkcijos apibrėžimo sritis yra simetriška nulio atžvilgiu aibė, pakanka rasti vieną x reikšmę, su kuria $f(x) \neq f(-x)$, kad galėtume teigti, jog $f(x)$ nėra lyginė. Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = 3x - 1$ nėra lyginė, nes $f(2) = 5$, o $f(-2) = -7$, taigi $f(2) \neq f(-2)$. Panašiai įsitikintume, kad $f(x)$ nėra nelyginė.

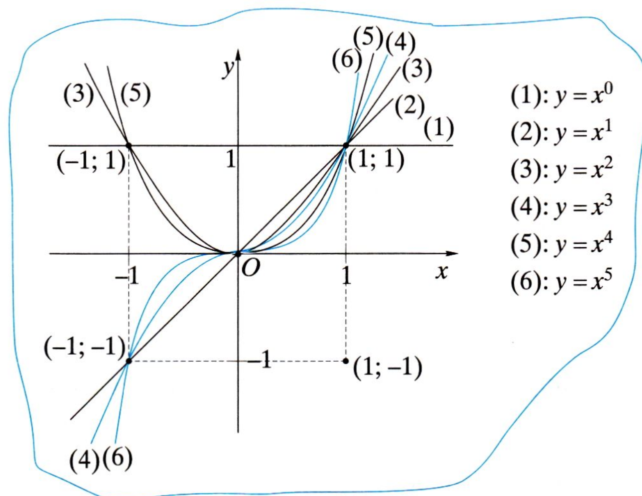
2 užduotis. Įsitikinkite, kad šios funkcijos nėra nei lyginės, nei nelyginės:
a) $f(x) = 2x - 5$; b) $f(x) = x^3 + x^2$.

Iš funkcijų $y = x^2$ ir $y = x^3$ grafikų matome, kad abi funkcijos didėja intervale $[0; +\infty)$. Pasinaudoję skaitinių nelygybių savybe: jei $a < b, c < d$ ir $a > 0, c > 0$, tai $ac < bd$, įrodysime, kad intervale $[0; +\infty)$ didėja kiekviena funkcija $y = x^n$ su natūraliuoju rodikliu n.

Iš tikrųjų, parinkime du skirtingus skaičius $x_1 \in [0; +\infty)$ ir $x_2 \in [0; +\infty)$, $x_1 < x_2$. Jei $x_1 = 0$, tai $x_1^n = 0, x_2^n > 0$, todėl $f(x_1) < f(x_2)$. Jei $x_1 > 0$, tai pritaikę minėtą skaitinių nelygybių savybę dviem vienodoms nelygybėms $x_1 < x_2, x_1 < x_2$ gausime $x_1^2 < x_2^2$. Panaudoję tą pačią savybę nelygybėms $x_1^2 < x_2^2$ ir $x_1 < x_2$ gauname $x_1^3 < x_2^3$ ir t. t. Taigi bet kokiai funkcijai $f(x) = x^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, jei tik $0 \leqslant x_1 < x_2$, tai ir $f(x_1) < f(x_2)$. Todėl visos šios funkcijos didėja intervale $[0; +\infty)$.

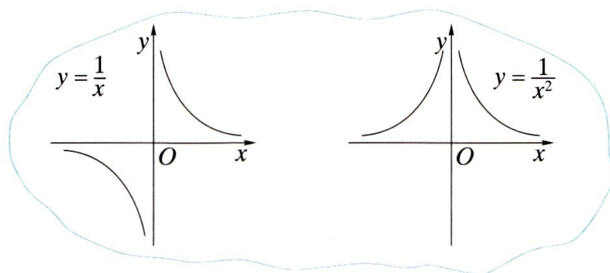
Tačiau intervale $(-\infty; 0]$ funkcijų $y = x^n$ elgesys skiriasi. Kai $n = 2m$ $(m \in \boldsymbol{N})$, funkcija mažėja, kai $n = 2m - 1$ $(m \in \boldsymbol{N})$, funkcija didėja. Taigi su nelyginiu n funkcija $y = x^n$ didėja visoje apibrėžimo srityje.

Kai $n = 0$, tai funkcija $y = x^0 = 1$ įgyja vienintelę reikšmę, lygią 1, jos grafikas — tiesė, lygiagreti Ox ašiai.



3 užduotis. Panagrinėkite brėžinyje pavaizduotą laipsninių funkcijų grafikų raizgalynę. Žvilgsniu arba pieštuko smaigaliu „pakeliaukite“ nubrėžtųjų funkcijų grafikais. Tame pačiame brėžinyje žvilgsniu „nubrėžkite“ funkcijų $y = x^6$, $y = x^7$ grafikus.

Laipsninė funkcija $y = x^n$ su neigiamuoju sveikuoju rodikliu n apibrėžta su visais $x \neq 0$. Nubraižykime funkcijų $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ grafikus. Jie parodo būdingąsias funkcijų $y = x^n$ su neigiamais sveikaisiais rodikliais savybes.



Tegu $n = -(2m-1)$ ($m \in \boldsymbol{N}$), t. y. n yra neigiamas nelyginis skaičius. Tada funkcija $f(x) = x^{-(2m-1)}$ yra nelyginė. Patikrinkime šį teiginį funkcijai $f(x) = x^{-3}$. Bet kokiam $x \neq 0$ gausime

$$(-x)^{-3} = \frac{1}{(-x)^3} = \frac{1}{-x^3} = -\frac{1}{x^3}, \quad \text{taigi } f(-x) = -f(x).$$

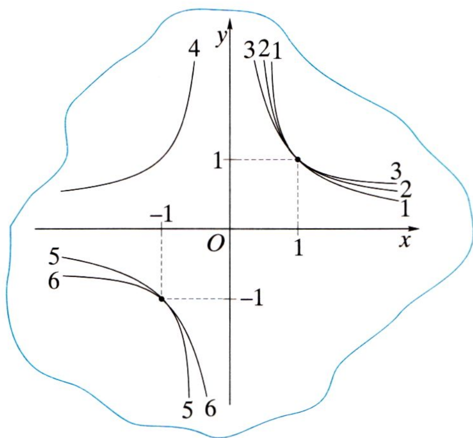
Kai $n = -2m$ ($m \in \boldsymbol{N}$), t. y. n yra neigiamas lyginis skaičius, funkcija $f(x) = x^{-2m}$ yra lyginė.

Intervale $(0; +\infty)$ visos laipsninės funkcijos $f(x) = x^n$ su neigiamais n mažėja. Iš tiesų, jei $x_1 \in (0; +\infty)$, $x_2 \in (0; +\infty)$ ir $x_1 < x_2$, tai $x_1^2 < x_2^2$, $x_1^3 < x_2^3$, ..., todėl

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}, \quad \frac{1}{x_1^2} > \frac{1}{x_2^2}, \quad \frac{1}{x_1^3} > \frac{1}{x_2^3}, \quad \ldots$$

Pastebėkime, kad visoms šioms funkcijoms su kiekviena x reikšme $f(x) \neq 0$. Tačiau, kai $x > 0$ yra didelis skaičius, funkcijos reikšmė $f(x)$ yra arti nulio. Pavyzdžiui, funkcijai $f(x) = x^{-1}$, kai $x = 1000$, gauname $f(1000) = 0{,}001$. Su mažomis teigiamomis x reikšmėmis funkcijos įgyja dideles reikšmes. Pavyzdžiui, įstatę į $f(x) = x^{-1}$ $x = 0{,}001$ gausime $f(0{,}001) = 1000$.

4 užduotis. Funkcijų $y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$, $y = x^{-3}$ grafikai nubraižyti vienoje koordinačių plokštumoje. Panagrinėkite brėžinį ir pasakykite, iš kurių kreivių sudarytas kiekvienos iš šių funkcijų grafikas.



5 užduotis. Prisiminkite skyrelyje nagrinėtų funkcijų savybes ir užpildykite lentelę:

Funkcija	Apibrėžimo sritis	Reikšmių sritis	Lyginumas	Didėjimo intervalai	Mažėjimo intervalai
$f(x) = x^{2m}$, $m \in \boldsymbol{N}$ $f(x) = x^{2m-1}$, $m \in \boldsymbol{N}$ $f(x) = x^{-2m}$, $m \in \boldsymbol{N}$ $f(x) = x^{-(2m-1)}$, $m \in \boldsymbol{N}$					

Pratimai ir uždaviniai

43. Palyginkite skaičius:

a) $3{,}2^3$ ir $3{,}7^3$; b) $2{,}7^6$ ir $(-2{,}8)^6$; c) $(-3{,}7)^3$ ir $(-3{,}2)^3$.

44. Duota funkcija $f(x) = x^3 - x$. Apskaičiuokite:

a) $f(1) + f(2)$; b) $f(-3) - f(-2)$; c) $f(4) - f(-3)$; d) $f(5) + f(0)$.

45. Palyginkite funkcijos $f(x) = x^{12}$ reikšmes:

a) $f(2{,}3)$ ir $f(3{,}2)$; b) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ ir $f\left(\frac{1}{5}\right)$; c) $f(-3)$ ir $f(-4)$; d) $f(21)$ ir $f(-19)$.

46. Palyginkite funkcijos $g(x) = x^{13}$ reikšmes:

a) $g(3{,}5)$ ir $g(5{,}3)$; b) $g\left(\frac{1}{7}\right)$ ir $g\left(\frac{1}{6}\right)$; c) $g(-5)$ ir $g(-2)$; d) $g(19)$ ir $g(-21)$.

47. Įrodykite, kad funkcija yra lyginė:

a) $f(x) = 3x^4$; b) $f(x) = -2x^6 + x^2$; c) $g(x) = \frac{1}{2x^2+6}$;

d) $g(x) = \frac{x^2}{x^2-15}$; e) $h(x) = \frac{|x|}{2{,}2x^4+x^2}$; f) $h(x) = \frac{1}{3}x^4 + |x^3|$.

48. Įrodykite, kad funkcija yra nelyginė:

a) $f(x) = 5x^5$; b) $f(x) = -3x^5 - x$; c) $g(x) = \frac{x^2}{x^3+x}$;

d) $g(x) = x \cdot |x|$; e) $h(x) = \frac{3}{-x-x^5}$; f) $h(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}x^3$.

49. Nustatykite, kurios iš šių funkcijų yra lyginės ir kurios — nelyginės:

a) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 5$; b) $g(x) = 3x^5 - x + 7$;

c) $h(x) = \frac{x^7}{x^2+x}$; d) $k(x) = \frac{x^3+x}{|x|}$;

e) $l(x) = (x-3)^2 + (3-x)^3$; f) $m(x) = (2-x)^3 + (x-2)^3$.

50. Duotos funkcijos $f(x) = x^5$ ir $g(x) = x^6$. Pasinaudokite šių funkcijų savybėmis ir nustatykite, ar reiškinio reikšmė teigiama, ar neigiama, ar lygi nuliui:

a) $f(15) - f(7)$; b) $f(0) + f(-3)$; c) $g(0) \cdot g(-60)$;
d) $g(-9) \cdot f(-9)$; e) $f(-20) + f(-20)$; f) $f(-4) + g(-4)$.

51. Nubraižykite funkcijos $h(x)$ grafiką, jeigu žinoma, kad ji apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje, yra lyginė, o jos reikšmės, kai $x \geqslant 0$, apskaičiuojamos pagal formulę:

a) $h(x) = x^2 - 2x$; b) $h(x) = x^3$; c) $h(x) = \frac{1}{2}x + 1$; d) $h(x) = |x| + x$.

52. Nubraižykite funkcijos $h(x)$ grafiką, jeigu žinoma, kad ji apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje, yra nelyginė, o jos reikšmės, kai $x \geqslant 0$, apskaičiuojamos pagal formulę:

a) $h(x) = x^2$; b) $h(x) = \sqrt{x}$; c) $h(x) = x^2 - 4x$; d) $h(x) = |x| - x$.

53. Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižyti funkcijų $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^4$ grafikai. Nurodykite, kuri kreivė yra kurios funkcijos grafikas. Pasinaudoję grafikais išspręskite nelygybes:

a) $x^2 \leqslant 1$; b) $x^2 > 1$;

c) $x^3 < 1$; d) $x^3 > -1$;

e) $x^2 \leqslant x^3$; f) $x^3 > x^4$;

g) $x^2 \leqslant x^4$; h) $x^4 > -x^3$.

54. Išspręskite lygtį:

a) $2x^4 = 32$; b) $\frac{1}{5}x^5 = 48{,}6$; c) $0{,}02x^3 - 20 = 0$; d) $0{,}001x^4 - 10 = 0$.

55. Nustatykite, ar yra tokia natūralioji n reikšmė, su kuria funkcijos $f(x) = x^n$ grafikas eina per nurodytą tašką:

a) $A(2; 8)$; b) $B(-7; -343)$; c) $C(-3; 81)$;

d) $D(3{,}5; 12{,}25)$; e) $E(\sqrt{3}; 81)$; f) $F(2; 16)$;

g) $G(-4; -16)$; h) $H(-\sqrt{3}; -9\sqrt{3})$; i) $I\left(-0{,}5; \frac{1}{64}\right)$.

56. Nurodykite, kurie taškai priklauso kokios nors funkcijos $y = x^n$ (n — natūralusis skaičius) grafikui:

$A(2; 5)$; $B(\sqrt{3}; 81)$; $C(-5; 25)$; $D(-7; 343)$; $E(9; 3)$; $F(3; 9)$.

57. Kurie iš taškų $A\left(\frac{1}{3}; 24\right)$, $B\left(-48; \frac{1}{7}\right)$, $C(1{,}6; 0{,}5)$, $D(-0{,}2; -40)$ priklauso funkcijos $f(x) = 8x^{-1}$ grafikui?

58. a) Nubraižykite funkcijų $f(x) = \frac{x}{3}$ ir $g(x) = \frac{3}{x}$ grafikus. Remdamiesi šiais grafikais raskite lygties $\frac{x}{3} = \frac{3}{x}$ ir nelygybės $\frac{x}{3} \leqslant \frac{3}{x}$ sprendinius.

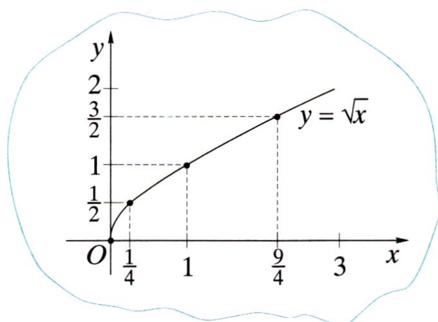
b) Nubraižykite funkcijų $f(x) = -\frac{2}{x}$ ir $g(x) = -\frac{x}{2}$ grafikus. Remdamiesi šiais grafikais raskite lygties $-\frac{2}{x} = -\frac{x}{2}$ ir nelygybės $-\frac{x}{2} < -\frac{2}{x}$ sprendinius.

59. Kiek natūraliųjų sprendinių turi lygtis $x^4 - y^4 = 65$?

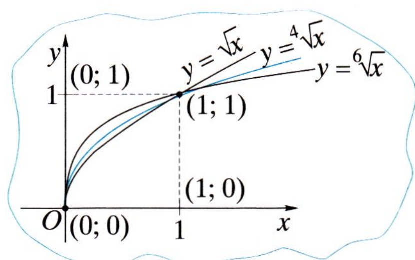
11.2. Funkcija $f(x) = \sqrt[n]{x}$

Lyginio laipsnio šaknį galime traukti tik iš neneigiamų skaičių. Todėl funkcijos $f(x) = \sqrt[2m]{x}$ ($m \in \boldsymbol{N}$) apibrėžimo sritis yra neneigiami skaičiai. Kadangi apibrėžimo sritis nėra nulio atžvilgiu simetriška aibė, tai funkcija $f(x) = \sqrt[2m]{x}$ nėra nei lyginė, nei nelyginė.

Panagrinėkime funkciją $f(x) = \sqrt{x}$. Funkcija didėja savo apibrėžimo srityje, nes didesnę x reikšmę atitinka didesnė šaknies reikšmė. Apskaičiavę kelias funkcijos reikšmes galėsime apytiksliai nubraižyti funkcijos grafiką.



Tas pačias savybes turi visos funkcijos $f(x) = \sqrt[2m]{x}$ ($m \in \boldsymbol{N}$): jos apibrėžtos neneigiamų skaičių intervale $[0; +\infty)$ ir yra didėjančios, nėra nei lyginės, nei nelyginės. Keletas tokių funkcijų grafikų pavaizduota brėžinyje.



Ištirkime funkciją $f(x) = \sqrt[n]{x}$ su nelyginiu n, pavyzdžiui, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Kadangi nelyginio laipsnio šaknį galima traukti iš bet kokio skaičiaus, tai šios funkcijos apibrėžimo sritis — visų realiųjų skaičių aibė. Prisiminkime, kad šaknis iš neigiamų skaičių galima išreikšti šaknimis iš teigiamų skaičių, pavyzdžiui,

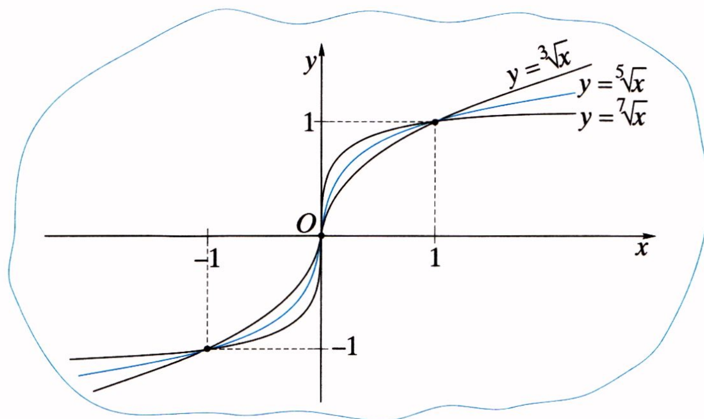
$$\sqrt[3]{(-8)} = -\sqrt[3]{8}, \quad \sqrt[3]{(-27)} = -\sqrt[3]{27}.$$

Lygybė $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ teisinga su visomis x reikšmėmis. Taigi funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x}$ yra nelyginė, nes

$$f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x).$$

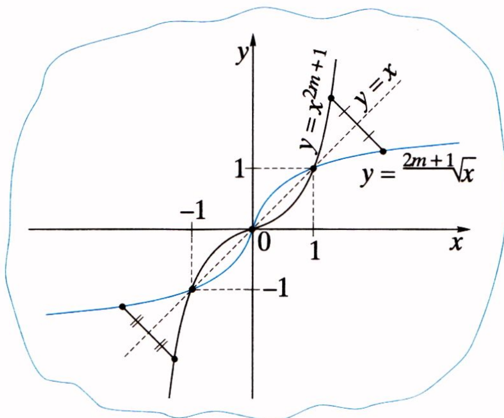
Šios funkcijos grafikas yra simetriška taško $O(0; 0)$ atžvilgiu kreivė. Funkcija didėja visoje savo apibrėžimo srityje.

Tas pačias savybes turi ir kitos funkcijos $f(x) = \sqrt[2m+1]{x}$ $(m \in \boldsymbol{N})$: jos apibrėžtos visoje skaičių aibėje, yra nelyginės ir didėjančios. Kelių tokių funkcijų grafikai pavaizduoti brėžinyje.



Funkcijos $f(x) = \sqrt[2m]{x}$ $(m \in \boldsymbol{N})$ yra apibrėžtos neneigiamų skaičių aibėje ir didėja. Funkcijos $f(x) = \sqrt[2m+1]{x}$ $(m \in \boldsymbol{N})$ yra apibrėžtos visų realiųjų skaičių aibėje, yra nelyginės ir didėja.

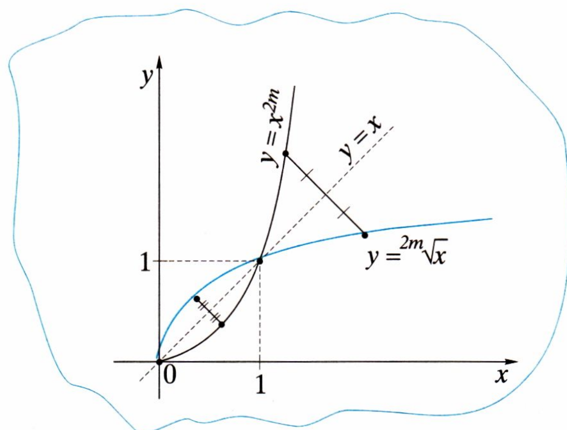
Raskime funkcijos $f(x) = x^3$ atvirkštinę. Pažymėję šios funkcijos priklausomą kintamąjį y užrašykime $y = x^3$. Kadangi kubinę šaknį galima traukti iš visų skaičių, tai $x = \sqrt[3]{y}$. Ši lygybė apibrėžia funkciją, atvirkštinę funkcijai $f(x) = x^3$. Taigi funkcijos $f(x) = x^3$ atvirkštinė yra $g(y) = \sqrt[3]{y}$. Pažymėję, kaip įprasta, funkcijos nepriklausomą kintamąjį x gauname, kad funkcijos $f(x) = x^3$ atvirkštinė yra funkcija $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Panašiai gautume, kad funkcijos $f(x) = x^{2m+1}$ $(m \in \boldsymbol{N})$ atvirkštinė yra $g(x) = \sqrt[2m+1]{x}$. Šių funkcijų grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu.



1 užduotis. Remdamiesi funkcijų grafikais išspręskite lygtis ir nelygybes: $\sqrt[3]{x} = x$, $\sqrt[3]{x} \geqslant x$, $\sqrt[3]{x} < x$.

Nei funkcija $f(x) = x^2$, nei jokia kita funkcija $g(x) = x^{2m}$ atvirkštinės neturi. Tačiau funkcija $f(x) = x^2$ turės atvirkštinę, jei jos apibrėžimo sritį susiaurinsime iki neneigiamų skaičių aibės $[0; +\infty)$. Šios funkcijos atvirkštinė yra $g(x) = \sqrt{x}$.

Funkcijos $f(x) = x^{2m}$ ($m \in \boldsymbol{N}$) su apibrėžimo sritimi $[0; +\infty)$ atvirkštinė yra funkcija $g(x) = \sqrt[2m]{x}$. Šių funkcijų grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu.



2 užduotis. Remdamiesi funkcijų grafikais išspręskite lygtį ir nelygybes: $x = \sqrt{x}$, $\sqrt{x} < x$, $\sqrt{x} \geqslant x$.

Pratimai ir uždaviniai

60. Apskaičiuokite:

a) $2\sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{-125} + \sqrt[9]{1}$;

b) $\sqrt[4]{16} - \sqrt[7]{1} + 5\sqrt[3]{-8}$;

c) $\dfrac{\sqrt[3]{-64}}{4} : 2^{-1} + (\sqrt{15} - \sqrt{3})(\sqrt{15} + \sqrt{3})$;

d) $\dfrac{\sqrt[3]{0{,}125}}{0{,}1^2} \cdot \sqrt{25} - (\sqrt{17} + \sqrt{2})(\sqrt{17} - \sqrt{2})$.

61. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite funkcijų grafikus ir nustatykite jų apibrėžimo ir reikšmių sritis:

a) $f(x) = x^3$ ir $g(x) = \sqrt[3]{x}$; b) $f(x) = x^4$ ir $g(x) = \sqrt[4]{x}$.

62. Raskite reiškinio apibrėžimo sritį:

a) $\sqrt{x-4} + \frac{19}{x-5}$; b) $\sqrt{2-x} + \frac{17}{x+1}$; c) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[4]{x-1}$;

d) $\sqrt[3]{21-x} \cdot \sqrt[6]{21+x}$; e) $\dfrac{\sqrt[4]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}$; f) $\dfrac{\sqrt[6]{x+9}}{\sqrt[5]{x+1}}$.

63. Su kuriomis x reikšmėmis teisinga lygybė $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}$? Pasirinkite teisingą atsakymą:

A $x \in (-\infty; +\infty)$

B $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

C $x \in [2; +\infty)$

64. Suprastinkite reiškinį:

a) $x+\sqrt{(x-6)^2}-\sqrt{(2-x)^2}$, kai $x>6$;

b) $\sqrt{(y-5)^2}-\sqrt{(5-y)^2}-y$, kai $y<5$;

c) $\sqrt[3]{(y-4)^3}+\sqrt[3]{(4-y)^3}+2y$, kai $y>0$;

d) $\sqrt[4]{(6-x)^4}+\sqrt[4]{(7-x)^4}+x$, kai $x>7$.

65. Į kokią aibę funkcija $y=\sqrt[4]{x}$ atvaizduoja intervalą:

a) $[0; 256]$; b) $\left[\frac{1}{16}; 1\right]$; c) $\left[\frac{16}{81}; \frac{81}{16}\right]$?

66. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} x-y=6, \\ \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=2{,}5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y=8, \\ \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=3\frac{1}{3}; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+\sqrt{xy}=10, \\ y+\sqrt{xy}=6; \end{cases}$

d) $\begin{cases} y+\sqrt{xy}=4, \\ x+\sqrt{xy}=12. \end{cases}$

67. Išspręskite lygtį:

a) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}=5$;

b) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+3}=-1$;

c) $\sqrt{2x+10}-\sqrt{x+1}=2$;

d) $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}$.

68. Apskaičiuokite:

a) $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{7}}+\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$;

b) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}-\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}+\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$;

c) $\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;

d) $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}-\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

69. Įrodykite, kad reiškinio reikšmė nepriklauso nuo kintamojo reikšmės:

a) $\left(1-\frac{m}{4}\right)\left(\frac{1}{2+\sqrt{m}}-\frac{1}{4+2\sqrt{m}}+\frac{1}{4-2\sqrt{m}}\right)$;

b) $\left(\frac{1}{2-2\sqrt{n}}-\frac{n^2+1}{1-n^2}+\frac{1}{2+2\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

c) $\left(\frac{a\sqrt{2}}{(1+a^2)^{-1}}-\frac{2\sqrt{2}}{a^{-1}}\right)\frac{a^{-3}}{1-a^{-2}}$;

d) $\frac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\frac{2y}{x+y}-\frac{xy}{x^2-y^2}$.

11.3. Laipsninė funkcija su racionaliuoju rodikliu

Prisiminkime, kad teigiamo skaičiaus x laipsnis x^r yra apibrėžtas su bet kokiu racionaliuoju rodikliu $r = \frac{m}{n}$. Todėl skaičių aibėje $(0; +\infty)$ galima nagrinėti visas funkcijas

$$f(x) = x^r, \quad r = \frac{m}{n},$$

čia $\frac{m}{n}$ — nesuprastinama trupmena.

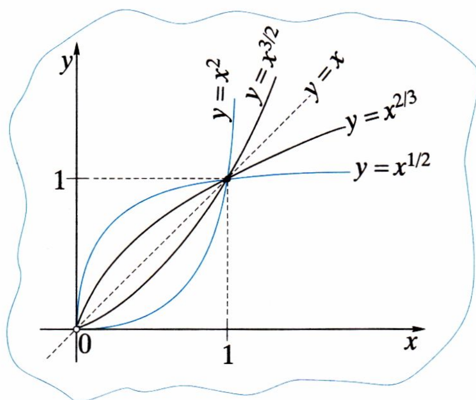
Kai $r = m$ — sveikas skaičius, gauname jau žinomą funkciją $f(x) = x^m$, tik dabar nagrinėjame ją apibrėžimo srityje $D_f = (0; +\infty)$.

Kai $r = \frac{1}{n}$ $(n > 1)$, tai pagal laipsnio trupmeniniu rodikliu apibrėžimą $x^r = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$. Funkciją $f(x) = \sqrt[n]{x}$ taip pat jau nagrinėjome.

Tegu r yra teigiamas racionalusis skaičius, užrašomas nesuprastinama trupmena $r = \frac{m}{n}$, $n > 1$. Tada funkciją galima užrašyti taip:

$$f(x) = x^r = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Kai $x = 1$, tai $f(1) = 1$. Funkcija didėja visoje apibrėžimo srityje. Parinkę keletą r reikšmių, nubraižykime atitinkamų funkcijų $f(x) = x^r$ grafikus.



Jau žinome, kad funkcija $g(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ yra atvirkštinė funkcijai $f(x) = x^2$, nagrinėjamai su neneigiamomis x reikšmėmis.

Raskime funkcijos $f(x) = x^r, r > 0, r = \frac{m}{n}$, atvirkštinę. Pažymėję funkcijos priklausomą kintamąjį y užrašykime funkciją taip: $y = x^{\frac{m}{n}}$, ir išreikškime iš šios lygybės x:

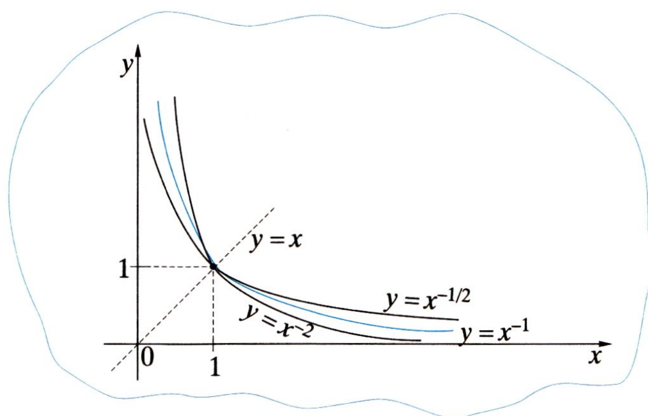
$$y^n = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n, \quad y^n = x^m, \quad x = y^{\frac{n}{m}}, \quad x = y^{\frac{1}{r}}.$$

Taigi funkcijos $f(x) = x^r$, $r > 0$, atvirkštinė yra $g(x) = x^{\frac{1}{r}}$. Todėl, pavyzdžiui, funkcijų $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ir $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu.

Panagrinėkime funkcijas $f(x) = x^r$ su neigiamu rodikliu r, pavyzdžiui, funkciją $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$. Ją galime užrašyti taip:

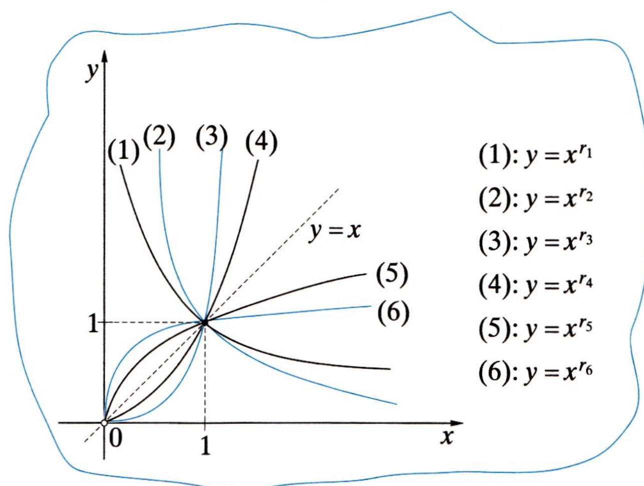
$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Didėjant x ($x > 0$) reikšmėms, reiškinio $\sqrt[3]{x^2}$ reikšmės didėja, o $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ — mažėja. Taigi funkcija $f(x)$ mažėja visoje apibrėžimo srityje. Funkcijos $f(x) = x^r$ su kitais neigiamais rodikliais r taip pat mažėja visoje apibrėžimo srityje. Keletas laipsninių funkcijų su neigiamais racionaliaisiais rodikliais grafikų pavaizduota brėžinyje. Taškas $(1; 1)$ priklauso kiekvienos funkcijos $f(x) = x^r$ grafikui.



Kaip ir teigiamų rodiklių atveju, galima įsitikinti, kad funkcijos $f(x) = x^r$ ($r = \frac{m}{n}$, $r < 0$) atvirkštinė yra $g(x) = x^{\frac{1}{r}}$.

Užduotis. Nubraižyti keleto laipsninių funkcijų su racionaliaisiais rodikliais grafikai.



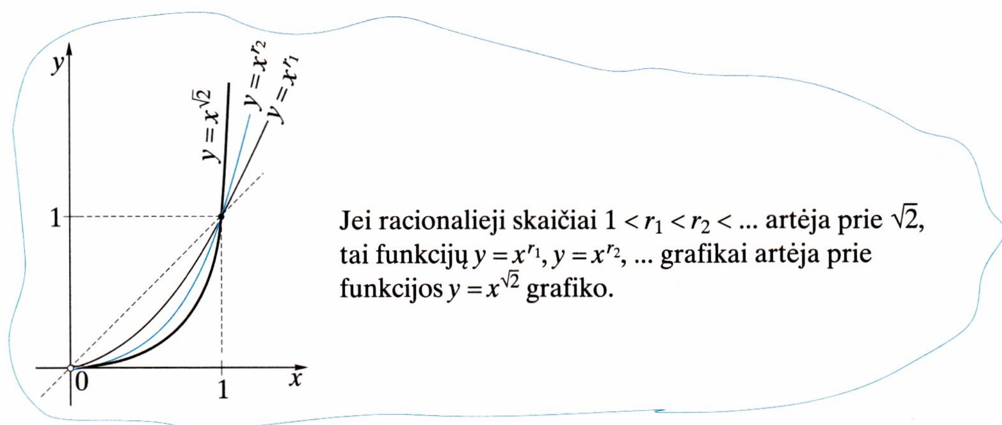
Panagrinėkite juos ir išrikiuokite rodiklius $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ didėjimo tvarka.

Ar galima apibrėžti teigiamo skaičiaus laipsnį *iracionaliuoju* rodikliu?
Ar galima apibrėžti funkciją $y = x^r$, kai $x > 0$, o r — iracionalusis skaičius, pavyzdžiui, funkciją $y = x^{\sqrt{2}}$? Tai iš tiesų įmanoma.

Kaip atrodo funkcijos $y = x^{\sqrt{2}}$ grafikas?
Jeigu imtume vis tikslesnius skaičiaus $\sqrt{2}$ artinius

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 1{,}4, \quad r_3 = 1{,}41, \quad \ldots$$

ir braižytume laipsninių funkcijų $y = x^{r_1}$, $y = x^{r_2}$, $y = x^{r_3}$, ... grafikus, tai jie vis labiau artėtų prie funkcijos $y = x^{\sqrt{2}}$ grafiko.



Pratimai ir uždaviniai

70. Laipsnį su trupmeniniu rodikliu pakeiskite šaknimi:

a) $2^{\frac{1}{3}}$; $4^{\frac{2}{5}}$; $3x^{\frac{1}{2}}$; $(3x)^{\frac{1}{2}}$; b) $4{,}3^{-\frac{1}{3}}$; $(xy)^{-\frac{2}{3}}$; $(a+b)^{\frac{1}{5}}$;

c) $4a(a+4)^{-\frac{1}{6}}$; $x \cdot y^{-\frac{2}{3}}$; $m^{\frac{1}{5}} + n^{\frac{1}{5}}$; d) $x^{0,2}$; $y^{-0,4}$; $z^{-2,5}$.

71. Šaknį pakeiskite laipsniu su trupmeniniu rodikliu:

a) $\sqrt{2x}$; $\sqrt[3]{3x^2}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{5}y}$; $\sqrt[4]{0{,}3m}$; b) $\frac{1}{\sqrt{ab}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{m}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{m^2}}$; $\frac{1}{\sqrt[4]{a+b}}$.

72. Apskaičiuokite:

a) $7^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{7^2}$; b) $6^{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{6^3}$; c) $\sqrt[3]{3^{14}\left(\frac{1}{3}\right)^8}$; d) $\sqrt[10]{4^{30}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}$.

73. Nustatykite, kuris skaičius didesnis:

a) $(5{,}2)^{\frac{1}{2}}$ ar $(6{,}2)^{\frac{1}{2}}$; b) $(0{,}5)^{-\frac{1}{2}}$ ar $(0{,}7)^{-\frac{1}{2}}$; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ ar $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$;

d) $(1{,}3)^{-4}$ ar $(2{,}3)^{-4}$; e) $3{,}5^{3-\pi}$ ar $3{,}7^{3-\pi}$; f) $2{,}8^{5-\pi}$ ar $2{,}3^{5-\pi}$.

74. Kubo tūris lygus V. Naudodami laipsnį su trupmeniniu rodikliu išreikškite kubo tūriu V:

a) kubo briaunos ilgį a;

b) kubo sienos plotą S;

c) kubo paviršiaus plotą P.

75. Suprastinkite:

a) $\sqrt[3]{a\sqrt{a^{-3}}} : a^{-\frac{1}{6}}$; b) $\sqrt[4]{a^4\sqrt[4]{a^{-1}}} \cdot a^{\frac{5}{16}}$;

c) $\frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$; d) $\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$;

e) $(a^{1,8}+1)(a^{\frac{6}{5}}+a^{\frac{3}{5}}+1)(a^{0,6}-1)$;

f) $(a^{\frac{7}{4}}-2)(a^{3,5}+2a^{1,75}+4)(8+a^{5,25})$.

76. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite laipsninių funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikus ir raskite koordinates taškų, kuriuose $f(x)=g(x)$, jei:

a) $f(x)=x^2$ ir $g(x)=x^{-2}$; b) $f(x)=x^5$ ir $g(x)=x^{-5}$.

77. Raskite duotajai funkcijai atvirkštinę funkciją:

a) $f(x)=x^{\frac{5}{6}}$; b) $f(x)=x^{1\frac{2}{3}}$;

c) $f(x)=x^{\frac{3}{4}}+2$; d) $f(x)=x^{-\frac{2}{3}}+1$.

78. Raskite laipsninių funkcijų grafikų susikirtimo taškų koordinates:

a) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ir $g(x)=x^{\frac{2}{3}}$; b) $f(x)=\sqrt[7]{x}$ ir $g(x)=x^{\frac{5}{7}}$.

79. Išspręskite lygtį:

a) $x^{\frac{2}{3}}=9$; b) $x^{\frac{3}{4}}=8$; c) $x^{\frac{2}{3}}=64$;

d) $x^{\frac{4}{3}}=16$; e) $x^{3\frac{1}{3}}=1024$; f) $x^{2,5}=243$;

g) $x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{5}{3}}=25$; h) $x^{\frac{7}{8}}\cdot x^{\frac{9}{8}}=4$; i) $x^{1,57}\cdot x^{6,43}=81$;

j) $x^{3,74}\cdot x^{0,26}=16$; k) $x^{\frac{5}{6}}\cdot x^{\frac{7}{6}}=9$; l) $x^{-\frac{3}{4}}\cdot x^{-\frac{5}{4}}=36^{-1}$.

80. Su kuria m reikšme $1+\sqrt{3}$ yra lygties $x^3+mx^2+2x-4=0$ sprendinys?

81. Išspręskite lygtį:

a) $\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x^2}-1}+\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=2$; b) $\frac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[3]{x^2}+1}+\frac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}-1}=7$.

82. Suprastinkite reiškinį:

a) $\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{a^3+b^3}{a+b}:(a^2-b^2)+\frac{2b}{a+b}$; b) $\left(\frac{a-3b}{a^2-b^2}+\frac{a+3b}{(a-b)^2}\right):\frac{a^2+3b^2}{(a-b)^2}$;

c) $\frac{a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-3}-b^{-3}}:\frac{(b-a)^{-1}}{(ab)^{-2}}$; d) $\frac{a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-3}+b^{-3}}:\left(\frac{(a+b)}{ab}\right)^{-2}$.

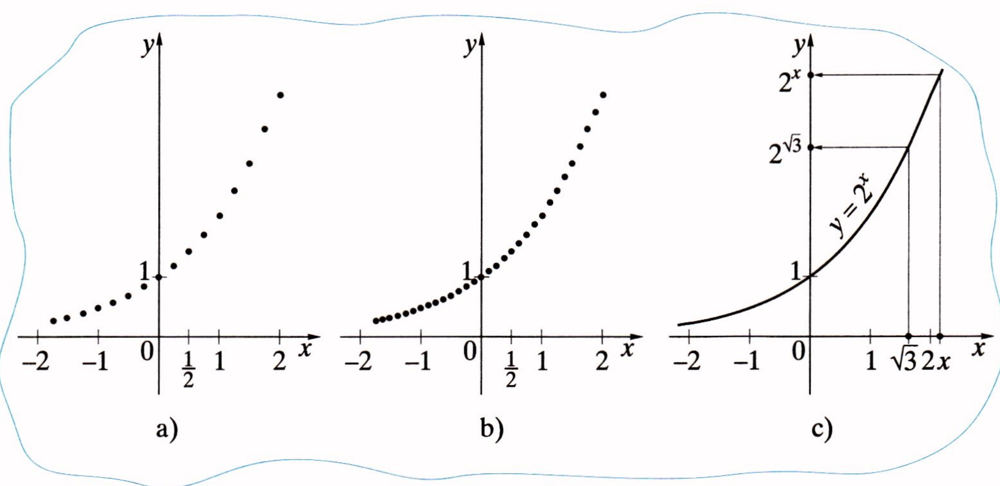
12. Rodiklinė funkcija

12.1. Rodiklinės funkcijos sąvoka

Išnagrinėjome laipsnines funkcijas $f(x) = x^r$. Jų reikšmes randame kintamojo x reikšmes keldami laipsniu. Pavyzdžiui, $f(x) = x^2$ reikšmes gauname keldami x reikšmes kvadratu. Ar galima sukeisti kintamąjį x ir laipsnio rodiklį $r = 2$ vietomis ir nagrinėti funkciją

$$f(x) = 2^x?$$

Jau žinome, kad laipsnis 2^x apibrėžtas su visomis racionaliosiomis x reikšmėmis. Taigi funkciją $f(x) = 2^x$ galime nagrinėti su visais racionaliaisiais x. Jeigu pradėję nuo $x = 0$ kintamojo x reikšmes keistume, pavyzdžiui, dydžiu $\frac{1}{4}$, skaičiuotume funkcijos reikšmes ir atidėtume atitinkamus grafiko taškus, gautume a) brėžinyje pavaizduotą taškų aibę. Jeigu x kitimo žingsnį sumažintume iki $\frac{1}{8}$, tarp taškų, atidėtų šiame brėžinyje, įsiterptų nauji taškai, žr. b) brėžinį. Dar sumažinę žingsnį gautume dar daugiau taškų.



Visus šiuos taškus galime sujungti kreive, kuriai priklauso ne tik taškai $(x; 2^x)$ su racionaliaisiais x, bet ir atitinkami taškai su iracionaliosiomis x reikšmėmis, žr. c) brėžinį. Taigi ši kreivė, eidama per visus taškus $(x; 2^x)$ su racionaliaisiais x, kartu apibrėžia laipsnį 2^x su iracionaliosiomis x reikšmėmis. Pavyzdžiui, $2^{\sqrt{3}}$ gauname suradę kreivės taško su $x = \sqrt{3}$ ordinatę.

Žinome, kad laipsnio 2^x reikšmės dažnai tiksliai suskaičiuoti negalime net su racionaliaisiais x. Pavyzdžiui,

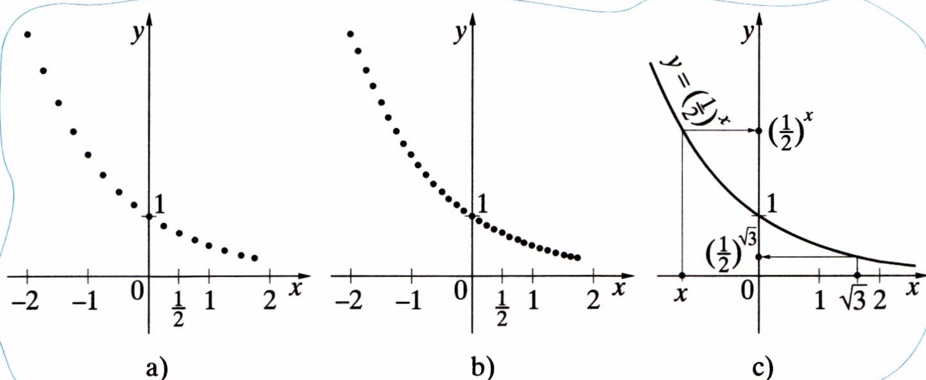
$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1,14142..., \quad 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} \approx 1,587...$$

Tuo labiau negalime tiksliai apskaičiuoti laipsnio 2^x reikšmės, kai x iracionalusis. Tačiau galime skaičiuoti apytiksliai. Pavyzdžiui, norėdami surasti apytikslę $2^{\sqrt{3}}$ reikšmę galime pakeisti $\sqrt{3}$ racionaliuoju skaičiaus artiniu r ir skaičiuoti laipsnį 2^r. Kuo mažiau racionalusis skaičius r skirsis nuo $\sqrt{3}$, tuo mažiau 2^r skirsis nuo $2^{\sqrt{3}}$:

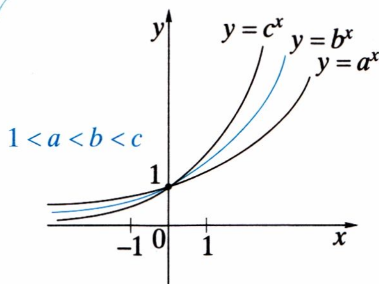
$$1 < 1{,}7 < 1{,}73 < \cdots < \sqrt{3} < \cdots < 1{,}74 < 1{,}8 < 2;$$
$$2^1 < 2^{1{,}7} < 2^{1{,}73} < \cdots < 2^{\sqrt{3}} < \cdots < 2^{1{,}74} < 2^{1{,}8} < 2^2.$$

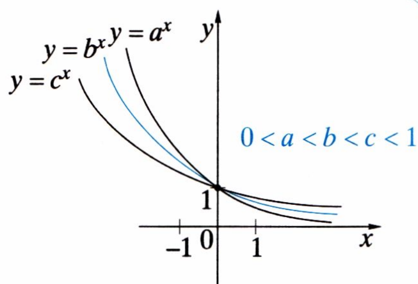
Taigi laipsnį 2^x, o kartu ir funkciją $f(x) = 2^x$ apibrėžėme su visomis x reikšmėmis. Ši funkcija vadinama *rodikline*.

Panašiai galima apibrėžti ir laipsnius $\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Tada gausime visoje realiųjų skaičių aibėje apibrėžtą rodiklinę funkciją $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Laipsnius a^x ir rodiklines funkcijas $f(x) = a^x$ galima apibrėžti su visais teigiamais skaičiais a. Kai $a > 1$, funkcijos $f(x) = a^x$ grafikas panašus į $f(x) = 2^x$ grafiką (žr. a brėžinį), kai $0 < a < 1$ — panašus į $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ grafiką (žr. b brėžinį).





Kai $a = 1$, funkcija $f(x) = 1^x = 1$ įgyja tą pačią reikšmę su visais x. Kai $a = 0$ arba $a < 0$, funkcijos $f(x) = a^x$ visiems x negalėtume apibrėžti. Iš tiesų, laipsnis 0^x neturi prasmės, pavyzdžiui, su $x = -1$, o laipsnis $(-2)^x$ su $x = \frac{1}{2}$, nes reikšdami kvadratine šaknimi gautume beprasmį reiškinį: $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$.

Funkcija $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ vadinama rodikline funkcija. Rodiklinės funkcijos apibrėžimo sritis — visų realiųjų skaičių aibė, reikšmių sritis — teigiamųjų skaičių aibė. Kai $a > 1$, funkcija $f(x) = a^x$ didėja, kai $0 < a < 1$ — mažėja.

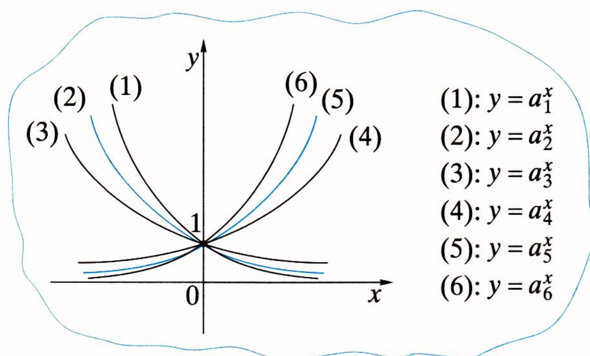
Rodiklinės funkcijos naudojamos aprašant įvairius reiškinius. Pavyzdžiui, jei bankas moka p procentų sudėtinių metinių palūkanų, tai padėjus į sąskaitą, pavyzdžiui, S_0 litų po x metų sąskaitoje bus

$$S = S_0 a^x, \quad \text{čia} \quad a = 1 + \frac{p}{100}.$$

Radioaktyvios medžiagos skilimo procesas turi tokią savybę: kad ir koks būtų šios medžiagos kiekis, jis dėl skilimo proceso sumažės pusiau per tą patį laikotarpį. Jeigu šis laikotarpis lygus vienam laiko matavimo vienetui, o M_0 — pradinis nesuskilusios medžiagos kiekis, tai po laiko t nesuskilusios medžiagos liks

$$M = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

1 užduotis. Brėžinyje pavaizduota rodiklinių funkcijų grafikų „puokštė". Išdėstykite rodiklinių funkcijų pagrindus didėjimo tvarka.



Laipsniai su realiaisiais rodikliais turi tas pačias savybes kaip ir laipsniai su racionaliaisiais rodikliais.

Jei $a > 0$, tai laipsnio a^x reikšmė apibrėžta su visais realiaisiais x. Su visais realiaisiais x ir y bei teigiamais a ir b teisingos šios lygybės:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; 3) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$; 5) $(a^x)^y = a^{xy}$.

PAVYZDYS. Apskaičiuokime $\left(2^{\sqrt{12}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$.
Naudodamiesi laipsnio kėlimo laipsniu savybe gauname

$$\left(2^{\sqrt{12}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2^{\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}} = 2^{\sqrt{4}} = 2^2 = 4.$$

2 užduotis. Apskaičiuokite $\left(\frac{3^{\sqrt{18}}}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$.

Pratimai ir uždaviniai

83. Apskaičiuokite:

a) $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2-a)$, kai $f(x) = 5^{x^2+2x}$;
b) $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(a-2)$, kai $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-x^2}$.

84. a) Naudodamiesi funkcijos $y = 2^x$ grafiku Oy ašyje apytiksliai atidėkite šiuos skaičius:
$\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
b) Naudodamiesi $y = 2^x$ grafiku Ox ašyje apytiksliai atidėkite x reikšmes, su kuriomis funkcijos $y = 2^x$ reikšmės lygios: 0,5; 0,9; 1,0; 1,8; 2,7.

85. a) Naudodamiesi funkcijos $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ grafiku Oy ašyje apytiksliai atidėkite šiuos skaičius:
$\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$; 3^{-3}; $\sqrt[3]{3}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1,5}$.
b) Naudodamiesi funkcijos $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ grafiku Ox ašyje apytiksliai atidėkite x reikšmes, su kuriomis funkcija lygi: 0,5; 0,9; 1,0; 3,0; 5,0.

86. Įrodykite, kad funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikai yra simetriški ordinačių ašies atžvilgiu, jei:
a) $f(x) = 5^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; b) $f(x) = 0{,}5^x$, $g(x) = 2^x$.

87. Raskite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikų susikirtimo taškų koordinates, jei:

a) $f(x) = 2^x$ ir $g(x) = 8$; b) $f(x) = 3^x$ ir $g(x) = \frac{1}{3}$;
c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ir $g(x) = 9$; d) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ ir $g(x) = \frac{1}{16}$.

88. Išspręskite lygtį:
a) $4^x = \frac{1}{4}$; b) $6^x = 36$; c) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \sqrt{5}$; d) $\left(\frac{1}{8}\right)^x = \sqrt[3]{8}$.

89. Nustatykite, ar funkcija $f(x)$ yra didėjanti, ar mažėjanti:
a) $f(x) = 0{,}3^{-x}$; b) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; c) $f(x) = 2{,}4^{-2x}$; d) $f(x) = 0{,}2^{-3x}$.

90. Iš kokios rodiklinių funkcijų savybės išplaukia šios nelygybės:

a) $\left(\frac{2}{7}\right)^{2,6} > \left(\frac{2}{7}\right)^{2,7}$; b) $\left(\frac{5}{3}\right)^{1,2} > \left(\frac{5}{3}\right)^{1,1}$?

91. Kuris skaičius didesnis:

a) $\pi^{-\sqrt{3}}$ ar $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{3}}$; b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1+\sqrt{6}}$ ar $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$;

c) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{1+\sqrt{3}}$ ar $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2}$; d) $(\sqrt{6})^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ ar $(\sqrt{6})^{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$?

92. Kurie iš šių skaičių didesni už 1 ir kurie mažesni už 1:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$; $(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{5}}$; $\pi^{-\frac{2}{5}}$; $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{2}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$?

93. Nubraižykite funkcijos grafiką ir išvardykite jos savybes:

a) $f(x) = 2^{2x}$; b) $y = 2^{-x}$; c) $y = -2^{x}$; d) $y = 2^{|x|}$.

94. Ar funkcijos $f(x) = 2^{x}$ ir $g(x) = 2^{|x|}$ įgyja

a) pačią didžiausią reikšmę; b) pačią mažiausią reikšmę?

95. Raskite funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis:

a) $y = 2^{\frac{1}{x}}$; b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-1}}$; c) $y = \frac{1}{5^{x^2}}$; d) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$.

96. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką, jei:

a) $f(x) = 3^{x-1}$; b) $f(x) = 3^{x} - 1$; c) $f(x) = 3^{x+1}$;

d) $f(x) = 3^{x} + 1$; e) $f(x) = 3^{|x|}$; f) $f(x) = 3^{-|x|}$.

97. Apskaičiuokite:

a) $(3^2)^2 - \left((-2)^3\right)^2 - (-5^2)^2$; b) $4^{-2} - 2^{-3} + (-2^3)^{-1}$;

c) $\frac{2\cdot 3^{20} - 5\cdot 3^{19}}{(-9)^9}$; d) $\frac{3^{15}+3^{14}}{3^{14}+3^{13}} \cdot \frac{(-2)^9}{1024}$;

e) $(4^{-1})^4 \cdot 2^5 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^3 \cdot (8^{-2})^5 \cdot (64^2)^3$; f) $\left(5^{\sqrt{24}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{6}}} - \left(9^{\sqrt{18}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$;

g) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (0{,}25)^2 \cdot \left((-5)^{-3}\right) \cdot (0{,}1^2)^{-2}$; h) $\frac{\left(3^{\sqrt{42}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{6}}}}{3^{\sqrt{7}}} + \left(\frac{7^{\sqrt{27}}}{4^{\sqrt{3}}}\right)^{\sqrt{3}}$.

98. Įrodykite, kad:

a) $5^5 - 5^4 + 5^3$ dalijasi iš 7; b) $45^{45} \cdot 15^{15}$ dalijasi iš 75^{30};

c) $10^9 + 10^8 + 10^7$ dalijasi iš 555; d) $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ dalijasi iš 45.

99. Įrodykite, kad su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi n:

a) reiškinys $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ dalijasi iš 10;

b) reiškinys $3^{n+3} + 2^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+2}$ dalijasi iš 6.

100. Apytiksliai nubraižę funkcijų grafikus nurodykite lygties sprendinių skaičių ir sprendinių ženklus:

a) $2^x = -x + 5$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 5$; c) $2^x = \frac{8}{x}$;

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -\frac{10}{x}$; e) $\left(\frac{15}{13}\right)^x = \frac{6}{x}$; f) $\left(1\frac{2}{3}\right)^x = -\frac{3}{x}$.

101. Remdamiesi grafikais raskite lygties apytikslius sprendinius:

a) $2^x = x - 3$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2x + 4$; c) $4^x = 3x + 1$;

d) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = x + 3$; e) $3{,}5^x = -x + 6$; f) $2{,}5^x = x - 5$.

102. Remdamiesi funkcijų grafikais išspręskite nelygybę:
a) $\left(\frac{1}{5}\right)^x > 1$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 1$; c) $6^x > 6$; d) $4^x < \frac{1}{4}$.

103. Kai šviesos spindulys į medžiagos paviršių krinta stačiu kampu, atspindėta šviesos dalis R nusakoma tokia formule:

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2, \quad \text{čia } n \text{ yra lūžio rodiklis.}$$

Apskaičiuokite, kiek procentų (dešimtosios tikslumu) šviesos atspindima, kai ta medžiaga yra:
a) vanduo ($n = 1{,}33$); b) stiklas ($n = 1{,}50$); c) deimantas ($n = 2{,}42$).

104. Norint apskaičiuoti, kiek medienos bus miške po t metų, galima pasinaudoti formule

$$A_t = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t,$$

A_0 — pradinis medienos kiekis,
p — kasmetinio priaugimo procentas,
A_t — medienos kiekis miške po t metų.

Pradinis medienos kiekis lygus $4 \cdot 10^5$ m^3, kasmetinio priaugimo procentas — 4%. Kiek medienos bus miške po 5 metų?

105. Dirbtuvių įrengimų kaina kasmet dėl amortizacijos mažėja 5%. Kiek kainuos už 120 000 Lt pirkti įrengimai po 10 metų?

12.2. Rodiklinės lygtys

Radioaktyviųjų elementų atomai skyla virsdami kitų elementų atomais. Šis procesas paklūsta tokiam dėsniui: kad ir koks būtų pradinis radioaktyviųjų atomų skaičius, pusė jų suskyla per tą patį laiką, vadinamą to elemento skilimo pusamžiu. Pavyzdžiui, radžio pusamžis yra 1620 metų, o radioaktyviosios anglies, naudojamos archeologinių radinių amžiui nustatyti — 5730 metų. Jeigu pradinis medžiagos kiekis lygus M_0, tai po vieno pusamžio liks $M_0 \cdot 2^{-1}$, po dviejų — $M_0 \cdot 2^{-2}$, o po x pusamžių —

$$M = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Norėdami sužinoti, po kiek laiko liks tik aštuntadalis pradinio medžiagos kiekio, turime spręsti lygtį

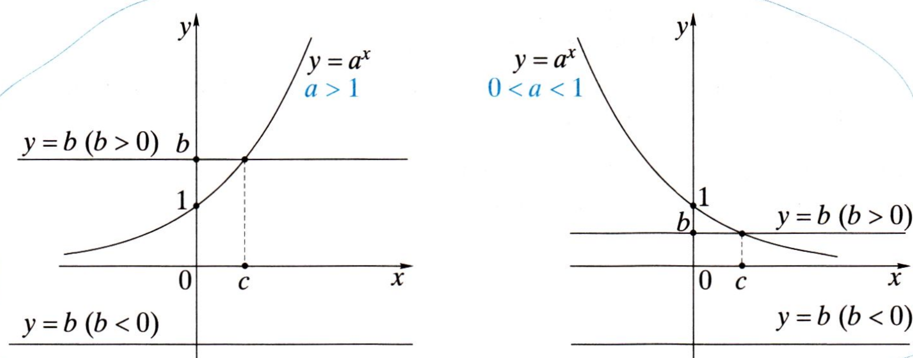
$$\frac{M_0}{8} = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Nesunku įsitikinti, kad $x = 3$ yra šios lygties sprendinys. Taigi aštuntadalis pradinio radžio kiekio liks po trijų pusamžių arba po $3 \cdot 1620 = 4860$ metų.

Išsprendėme paprastą lygties $a^x = b$ pavyzdį. Kadangi nežinomasis šioje lygtyje yra laipsnio rodiklis, tokią lygtį vadiname *rodikline*. Rodiklinėmis vadinsime ir sudėtingesnes lygtis, kuriose nežinomasis yra laipsnio rodiklių reiškiniuose, pavyzdžiui:

$$3^{x+2} = 9, \quad 7^{x-5} = 49, \quad 3^x + 3^{2x} + 3^{3x} = 37.$$

Panagrinėkime rodiklinę lygtį $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$. Kadangi funkcija $f(x) = a^x$ yra monotoninė, o jos reikšmių aibė — intervalas $(0; +\infty)$, tai su kiekvienu teigiamu skaičiumi b lygtis $a^x = b$ turi vienintelį sprendinį, o su $b \leqslant 0$ — sprendinių neturi.



Lygtis $a^x = b$ turi sprendinį tik tada, kai $b > 0$!

Taigi jei sprendžiant lygtį $a^x = b$ pavyko surasti tokį c, kad $b = a^c$, tai $x = c$ yra šios lygties sprendinys.

Panašiai sprendžiame ir kitokias rodiklines lygtis.

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį: a) $2^{x-1} = \frac{1}{4}$; b) $3^{2-x} = 3^{x+1}$; c) $5^{x^2+2x+1} = 1$.

a) Lygties $2^{x-1} = \frac{1}{4}$ dešiniąją pusę užrašę taip: $\frac{1}{4} = 2^{-2}$, gausime

$$2^{x-1} = 2^{-2}, \quad x - 1 = -2, \quad x = -1.$$

b) Spręsdami lygtį $3^{2-x} = 3^{x+1}$ galime iš karto rašyti:

$$2 - x = x + 1, \quad 2x = 1, \quad x = \frac{1}{2}.$$

c) Spręsdami lygtį $5^{x^2+2x+1} = 1$ galime pakeisti: $1 = 5^0$. Tada iš

$$5^{x^2+2x+1} = 5^0$$

gauname

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \text{arba} \quad (x + 1)^2 = 0.$$

Taigi vienintelis lygties sprendinys yra $x = -1$.

Dažnai rodiklinės lygtys pakeičiant nežinomąjį pertvarkomos į racionaliąsias lygtis.

2 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $4^x + 2^x - 6 = 0$.
Pastebėkime, kad $4^x = (2^x)^2$. Pakeitę nežinomąjį, t. y. pažymėję $z = 2^x$, iš rodiklinės lygties gausime kvadratinę lygtį

$$z^2 + z - 6 = 0.$$

Ji turi du sprendinius $z_1 = -3$ ir $z_2 = 2$. Pradinės lygties sprendinius rasime iš paprastų rodiklinių lygčių

$$2^x = -3 \quad \text{ir} \quad 2^x = 2.$$

Pirmoji lygtis sprendinių neturi, o antrosios sprendinys $x = 1$. Taigi rodiklinė lygtis turi vienintelį sprendinį $x = 1$.

Kartais rodiklinė lygtis supaprastėja atlikus kai kuriuos paprastus pertvarkius.

3 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį: a) $3^{x+1} + 3^x = 36$; b) $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$.

a) Kairėje lygties $3^{x+1} + 3^x = 36$ pusėje iškelkime prieš skliaustus bendrą daugiklį:

$$3^{x+1} + 3^x = 3^x(3 + 1) = 4 \cdot 3^x.$$

Dabar lygtį $4 \cdot 3^x = 36$ padaliję iš 4 gausime $3^x = 9$, $x = 2$.

b) Iš pradžių padalykime abi puses iš 3^{2x} (šis reiškinys nelygus nuliui, todėl dalyti galima!):

$$\frac{4 \cdot 2^{2x}}{3^{2x}} - \frac{6^x}{3^{2x}} = \frac{18 \cdot 3^{2x}}{3^{2x}}.$$

Dabar pertvarkykime lygtį taip:

$$4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 18 = 0.$$

Pažymėję $a = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ gauname kvadratinę lygtį

$$4a^2 - a - 18 = 0.$$

Ši lygtis turi du sprendinius: $a_1 = \frac{9}{4}$ ir $a_2 = -2$.
Iš $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$ gauname $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $x = -2$, o lygtis $\left(\frac{2}{3}\right)^x = -2$ sprendinių neturi.
Taigi mūsų lygtis turi vienintelį sprendinį $x = -2$.

Užduotis. Išspręskite lygtį $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$ dalydami abi jos puses ne iš 3^{2x}, bet iš 2^{2x} arba 6^x.

Pratimai ir uždaviniai

106. Išspręskite lygtis:

a) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$,
$5^{x^2-x-2} = 625$,
$8^x = 16$,
$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{9}\right)^2$;

b) $5^{x^2-4x+4} = 1$,
$7^{x^2-2x+1} = 1$,
$4^{x^2+2} = 1$,
$6^{x^2+2x+15} = 1$;

c) $3^{2x} - 30 \cdot 3^x + 81 = 0$,
$10 \cdot 2^x - 2^{2x} - 16 = 0$,
$25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$,
$16^x - 8 \cdot 4^x + 17 = 0$;

d) $4^{x+1} + 4^x = 320$,
$7^{x+2} - 1 \cdot 7^{x-1} = 342$,
$2^x + 3 \cdot 2^{x-2} = 28$,
$3^{x+2} + 3^{x-1} = 28$.

107. Raskite lygties sprendinius:

a) $10^{x+1} = 10\sqrt{10}$;

b) $0{,}01^{x+1} = 1$;

c) $\sqrt[3]{10^x} = 0{,}1$;

d) $100^x = 0{,}01$;

e) $0{,}01^x = 0{,}1\sqrt{10}$;

f) $0{,}1^{x-2} = \sqrt[5]{100}$.

108. Išspręskite lygtį, padaliję abi jos puses iš atitinkamo reiškinio:

a) $12^x = 64 \cdot 3^x$; b) $10^x = 625 \cdot 2^x$;

c) $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$; d) $9 \cdot 9^{\sqrt{x}} - 13 \cdot 6^{\sqrt{x}} + 4 \cdot 4^{\sqrt{x}} = 0$;

e) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$; f) $3 \cdot 2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0$.

109. Apskaičiuokite funkcijos $f(x)$ grafiko ir abscisių ašies sankirtos taško koordinates, jei:

a) $f(x) = 6^x - 6^{3-x} - 30$; b) $f(x) = 7^x - 7^{2-x} - 48$;

c) $f(x) = 6^x - 16 \cdot 3^x$; d) $f(x) = 18^x - 8 \cdot 9^x$;

e) $f(x) = 4^x - 3 \cdot 2^x - 40$; f) $f(x) = 9^x - 2 \cdot 3^x - 63$.

110. Raskite lygties sprendinius:

a) $12^{x-5} = 14^{x-5}$; b) $3^{2-x} = 2^{x-2}$;

c) $5^{x^2-2} = 7^{x^2-2}$; d) $0{,}3^{3-x^2} = 0{,}6^{x^2-3}$.

111. Su kuriomis x reikšmėmis funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ reikšmės yra lygios:

a) $f(x) = 2^{7x-x^2}$ ir $g(x) = 4^{x+2}$;
b) $f(x) = 3^{x+2}$ ir $g(x) = 3^{x+1} + 18$;
c) $f(x) = 3 \cdot 4^x + 4$ ir $g(x) = 16^x$;
d) $f(x) = \frac{1}{6^{x-1}}$ ir $g(x) = 7 - \frac{1}{6^x}$;
e) $f(x) = \frac{1}{2^{x-1}} - 2$ ir $g(x) = \frac{1}{2^x}$;
f) $f(x) = 5 \cdot 4^x$ ir $g(x) = 2 \cdot 25^x - 3 \cdot 10^x$;
g) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x} - 128$ ir $g(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$;
h) $f(x) = 64^{\frac{1}{x}}$ ir $g(x) = 2^{3+\frac{3}{x}} - 16$?

112. Išspręskite lygčių sistemą:

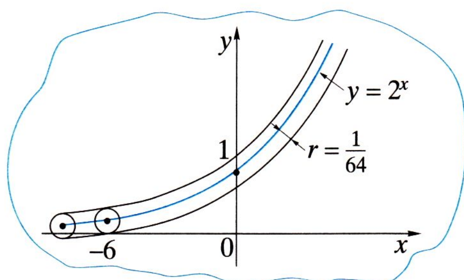
a) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x + y = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ x - y = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 8\frac{1}{9}, \\ 2^x - 3^y = 7\frac{8}{9}; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5^x - 5^y = 100, \\ 5^{x-1} + 5^{y-1} = 30; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 7^x - 16y = 0, \\ 4^x - 49y = 0; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77, \\ 3^x - 2^{y/2} = 7. \end{cases}$

12.3. Rodiklinės nelygybės

Įsivaizduokime, kad funkcijos $y = 2^x$ grafiką brėžiame pieštuku, kurio smaigalys yra $r = \frac{1}{64}$ cm spindulio skritulys, stengdamiesi, kad pieštuko smaigalio centras judėtų tiksliai funkcijos $y = 2^x$ grafiko taškais (žr. pav.). Kokiems x mūsų nubrėžta $\frac{1}{32}$ cm storio linija bus virš Ox ašies?



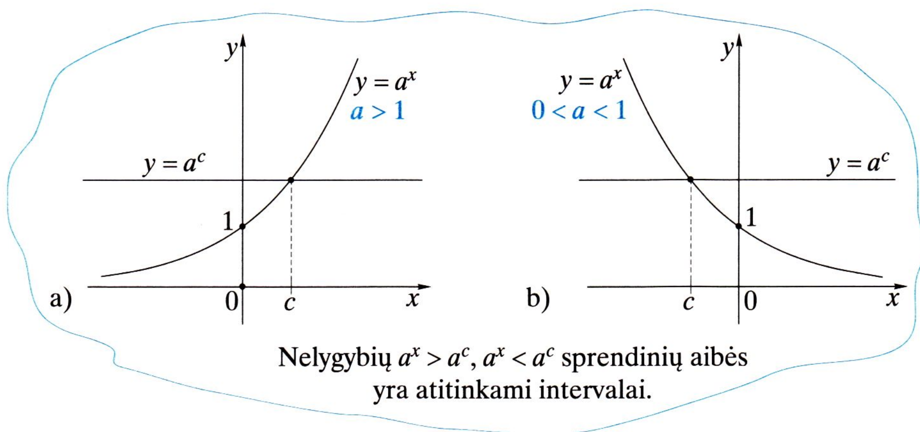
Iš brėžinio matome, kad taip bus, jei $2^x > \frac{1}{64}$, t. y. $2^x > 2^{-6}$, $x > -6$.

Išsprendėme paprastą nelygybės $a^x > b$ pavyzdį. Tokios nelygybės vadinamos *rodiklinėmis*. Rodiklinėmis taip pat vadinsime ir kitokias nelygybes, kurių nežinomasis yra laipsnio rodiklių reiškiniuose.

Panagrinėkime, kokius sprendinius gali turėti nelygybės $a^x > b$ ir $a^x < b$, čia $a > 0$, $a \neq 1$. Kadangi a^x įgyja tik teigiamas reikšmes, tai su $b \leqslant 0$ nelygybė $a^x < b$ sprendinių neturės, o nelygybės $a^x > b$ sprendinių aibė bus visi realieji skaičiai.

Tegu dabar b yra teigiamas skaičius. Jau žinome, kad tada lygtis $a^x = b$ turi vienintelį sprendinį; pažymėkime jį $x = c$. Taigi $b = a^c$, todėl mūsų nelygybes galėsime užrašyti taip: $a^x > a^c$, $a^x < a^c$.

Iš brėžinio a) matyti, kad kai $a > 1$, nelygybės $a^x > a^c$ sprendiniai — visi intervalo $(c; +\infty)$ skaičiai, o nelygybės $a^x < a^c$ sprendiniai sudaro intervalą $(-\infty; c)$.



Nelygybių $a^x > a^c$, $a^x < a^c$ sprendinių aibės yra atitinkami intervalai.

Pavyzdžiui, nelygybę $2^x > 8$ pakeitę nelygybe $2^x > 2^3$ gauname, kad jos sprendiniai yra $x > 3$. Nelygybę $3^{x-1} > 3$ pakeičiame nelygybe $x - 1 > 1$ ir gauname $x > 2$.

Kai $0 < a < 1$, iš brėžinio b) matome, kad nelygybės $a^x > a^c$ sprendiniai — visi intervalo $(-\infty; c)$ skaičiai, o nelygybės $a^x < a^c$ sprendiniai yra intervalo $(c; +\infty)$ skaičiai.

Taigi nelygybę $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8$ sprendžiame taip:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, \quad x < -3.$$

Nelygybę $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} < 1$ sprendžiame pakeitę $1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^0, \quad x - 1 > 0, \quad x > 1.$$

Panašiai sprendžiame ir nelygybes $a^{g(x)} > a^{h(x)}$ arba $a^{g(x)} < a^{h(x)}$ bei negriežtas nelygybes $a^{g(x)} \leqslant a^{h(x)}$ arba $a^{g(x)} \geqslant a^{h(x)}$.

1 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę: a) $2^{3-x} > 2^{5+x}$; b) $(0{,}7)^{2+x} \geqslant (0{,}7)^{2x+1}$.

a) Nelygybę

$2^{3-x} > 2^{5+x}$

keičiame nelygybe

$3 - x > 5 + x$

ir gauname: $-2x > 2$, $x < -1$, t. y. nelygybės sprendiniai sudaro intervalą $(-\infty; -1)$.

b) Nelygybę

$(0{,}7)^{2+x} \geqslant (0{,}7)^{2x+1}$

keičiame nelygybe

$2 + x \leqslant 2x + 1$

ir ją išsprendę gauname: $x \geqslant 1$, t. y. $[1; +\infty)$ yra jos sprendinių intervalas.

Kaip ir rodiklines lygtis, rodiklines nelygybes kartais galima pertvarkyti į racionaliąsias nelygybes.

2 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę: a) $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 \leqslant 0$; b) $2^x + 2^{3-x} > 6$.

a) Pastebėkime, kad $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$. Taigi, pažymėję $y = 2^x$, nelygybę $(2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 16 \leqslant 0$ galėsime perrašyti taip $y^2 - 10y + 16 \leqslant 0$.

Lygtis $y^2 - 10y + 16 = 0$ turi du sprendinius: $y_1 = 2$, $y_2 = 8$.

Tada $y^2 - 10y + 16 = (y - 2)(y - 8)$. Išsprendę nelygybę $(y - 2)(y - 8) \leqslant 0$ gauname tokį sprendinių intervalą: $[2; 8]$.

Taigi nelygybės $y^2 - 10y + 16 \leqslant 0$ sprendiniai yra skaičiai, kuriems teisingos nelygybės: $2 \leqslant y \leqslant 8$. Įstatę $y = 2^x$ gausime:

$2^1 \leqslant 2^x \leqslant 2^3, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3,$

t. y. pradinės nelygybės sprendiniai sudaro intervalą $[1; 3]$.

b) Perrašykime nelygybę $2^x + 2^{3-x} > 6$ taip:

$2^x + 2^3 \cdot 2^{-x} > 6, \quad 2^x + \frac{8}{2^x} > 6.$

Kadangi 2^x gali įgyti tik teigiamas reikšmes, tai nelygybę galima dauginti iš reiškinio 2^x. Padauginę gausime nelygybę $(2^x)^2 + 8 > 6 \cdot 2^x$, kurią galime spręsti panašiai kaip a) pavyzdyje:

$(2^x)^2 + 8 > 6 \cdot 2^x, \quad y = 2^x;$

$y^2 + 8 > 6y, \quad y^2 - 6y + 8 > 0, \quad (y-2)(y-4) > 0.$

Šią nelygybę tenkina skaičiai y, kuriems $y < 2$ arba $y > 4$. Įstatę $y = 2^x$ gauname, kad pradinę nelygybę tenkina tie x, kuriems $2^x < 2$ arba $2^x > 4$. Taigi nelygybės sprendinių aibė yra dviejų intervalų sąjunga: $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Pratimai ir uždaviniai

113. Ar ekvivalenčios nelygybės:

a) $5^{x^2} < 5^x$ ir $x^2 < x$;

b) $\left(\frac{1}{16}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ ir $2x < x - 1$;

c) $(0{,}7)^{2-x} < (0{,}49)^x$ ir $2 - x < 2x$?

114. Kokia turi būti a reikšmė, kad būtų teisinga nelygybė:

a) $a^3 < a^2$; b) $a^4 > a^3$; c) $a^{\frac{1}{3}} < a^{\frac{1}{2}}$;

d) $a^{0{,}75} > a^{0{,}85}$; e) $a^{\frac{3}{5}} > a^{\frac{1}{5}}$; f) $a^{2{,}3} < a^{\frac{1}{2{,}3}}$?

115. Išspręskite nelygybes:

a) $3^{x-6} < 3^{6x-1}$,

$0{,}2^{3x+1} < 0{,}2^{x-1}$,

$0{,}7^x < 2\frac{2}{49}$,

$0{,}9^x \geqslant 1\frac{19}{81}$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} < 4^{x+3}$,

$7^{x-1} < \left(\frac{1}{7}\right)^{2-3x}$,

$36^{x-2} > \left(\frac{1}{6}\right)^{3-x}$,

$\left(\frac{1}{11}\right)^{5x+1} < 121^{x+2}$;

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 \geqslant 0$,

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 27 \leqslant 0$,

$4^{x-3} + 2 > 3 \cdot 2^{x-3}$,

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-5} + 4 \geqslant 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}$;

d) $5^{\frac{2x-1}{3x-1}} > \frac{1}{5}$,

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4x+3}{1-2x}} > 9$,

$2^{\frac{x^2-6x+8}{x^2-7x+10}} > 1$,

$7^{\frac{x^2-11x+30}{x^2-7x+10}} < 1$.

116. Raskite nelygybės sprendinių intervalo vidurio tašką:

a) $81^x - 4 \cdot 9^x + 3 \leqslant 0$; b) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 < 0$;

c) $2^{x-3} - 3 \cdot (\sqrt{2})^{x-3} + 2 < 0$; d) $10 \cdot (\sqrt{3})^{x+1} - 9 - 3^{x+1} \geqslant 0$.

117. Išspręskite nelygybę:

a) $2^{|x+2|} \geqslant 8$; b) $9^{|x-1|} > 3$; c) $4^{|x-1|} < 8$; d) $3^{|x|+2} < 27$.

118. Naudodamiesi grafikais raskite lygčių ir nelygybių apytikslius sprendinius:

a) $2^x = 5$, $2^x \leqslant 7$; b) $3^x = 6$, $3^x \geqslant 5$; c) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 1$, $\left(\frac{1}{5}\right)^x > 9$; d) $(0{,}1)^x = 2$, $(0{,}1)^x < 3$.

119. Nustatykite, su kuriomis sveikosiomis k reikšmėmis teisinga nelygybė:

a) $6^k > \sqrt[3]{36}$; b) $\sqrt[5]{1024} \leqslant 4^k$;

c) $343 \leqslant 7^{k+2}\sqrt{49}$; d) $\sqrt{2\sqrt{2}} > 2^{3k}\sqrt{512}$.

120. Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos $f(x)$ reikšmės yra neneigiamos, jei:

a) $f(x) = 2^x \cdot 5^x - 0{,}1 \cdot 10^{3x}$; b) $f(x) = (0{,}25)^{x-3} - \frac{32}{2^{x+2}}$;

c) $f(x) = 49^{x-2} - 8 \cdot 7^{x-2} + 7$; d) $f(x) = 3^{\frac{x-2}{x^2-4x+3}} - 1$?

121. Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos $f(x)$ reikšmės yra neigiamos, jei:

a) $f(x) = 2^{3x+1} - 2^{3x} + 2^{3x+1} - 12$; b) $f(x) = 81^x - 4 \cdot 9^x + 3$;

c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x-3}} + 27$; d) $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{1-x}} - 49$?

122. Duota funkcija $f(x) = 2^{x^2-3x}$.

1) Raskite $f(0)$, $f(1)$, $f(3-x)$.
2) Išspręskite lygtį $f(x) = f(1)$.
3) Išspręskite nelygybę $f(x) + 2f(3-x) \leqslant 0{,}75$.
4) Raskite nelygybės $f(x) + 2f(3-x) \leqslant 0{,}75$ sveikųjų sprendinių aritmetinį vidurkį.

123. Duota funkcija $f(x) = 3^{x-x^2}$.

1) Raskite $f(-1)$, $f(0)$, $f(1-x)$.
2) Išspręskite lygtį $f(-1) = f(x)$.
3) Išspręskite nelygybę $2f(x) + f(1-x) \geqslant \frac{1}{3}$.
4) Raskite x reikšmių intervalo, kuriame teisinga nelygybė $2f(x) + f(1-x) \geqslant \frac{1}{3}$, vidurio tašką.

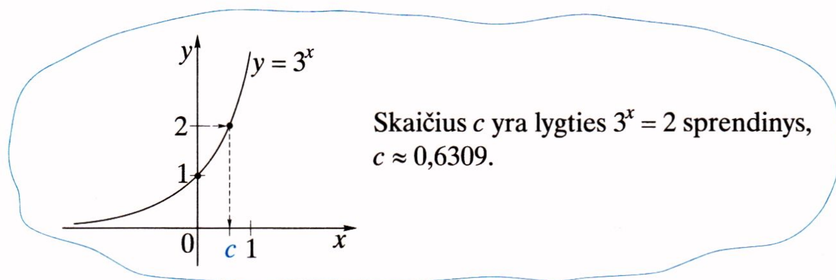
13. Logaritminė funkcija

13.1. Logaritmo sąvoka

Rodiklinė lygtis $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0)$ visada turi vienintelį sprendinį. Spręsdami tokias lygtis skaičių b reikšdavome laipsniu pagrindu a: jei $b = a^c$, tai $a^x = a^c$ ir $x = c$. Pavyzdžiui,

$$3^x = \frac{\sqrt{3}}{27}, \quad 3^x = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^3}, \quad 3^x = 3^{-2\frac{1}{2}}, \quad x = -2\frac{1}{2}.$$

Tačiau taip paprastai galime rasti tik nedaugelio lygčių $a^x = b$ sprendinius. Pavyzdžiui, tikslaus lygties $3^x = 2$ sprendinio negalėtume nurodyti, nors jis ir yra. Žinoma, naudodamiesi skaičiuokliu arba grafiku galėtume nurodyti apytikslę sprendinio reikšmę.



Lygtis $a^x = b$ tenka spręsti įvairiuose matematikos ir jos taikymo uždaviniuose. Jų sprendiniams žymėti įvesime specialų žymenį.

APIBRĖŽIMAS
Tegu a, b yra du teigiami skaičiai ir $a \neq 1$. Rodiklį laipsnio, kuriuo pakėlę a gauname b, vadiname skaičiaus b logaritmu pagrindu a ir žymime $\log_a b$.

Pavyzdžiui:

$5^3 = 125$, todėl $\log_5 125 = 3$ (skaitome: logaritmas 125 pagrindu 5 lygus 3),

$4^{-2} = \frac{1}{16}$, todėl $\log_4 \frac{1}{16} = -2$,

$7^0 = 1$, todėl $\log_7 1 = 0$.

1 užduotis. Raskite $\log_2 8$, $\log_3 \sqrt{3}$, $\log_{\frac{1}{3}} 27$.

Kai logaritmo pagrindas $a = 10$, paprastai vietoj $\log_{10} b$ rašome $\lg b$, o logaritmą vadiname *dešimtainiu.*

Naudodami logaritmo žymenį lygties $3^x = 2$ sprendinį dabar galime užrašyti taip: $x = \log_3 2$. Apskritai jei $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, tai lygties

$a^x = b$ sprendinį užrašome taip: $x = \log_a b$.

Jeigu $a > 0$ ir $a \neq 1$, tai lygtis $a^x = 1$ turi vienintelį sprendinį $x = 0$, o lygtis $a^x = a$ vienintelį sprendinį $x = 1$. Taigi $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ visiems $a > 0$, $a \neq 1$.

2 užduotis. Pasinaudokite skaičiuokliu ir raskite apytikslę lygties $10^x = 2$ sprendinio reikšmę, t. y. raskite apytikslę skaičiaus $\lg 2$ reikšmę.

Kadangi $x = \log_a b$ yra lygties $a^x = b$ sprendinys, tai

$$a^{\log_a b} = b \ (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$$

Ši lygybė dažnai vadinama *pagrindine logaritmų tapatybe.*

Taigi bet kokį teigiamą skaičių b galima užrašyti pagrindo $a > 0, a \neq 1$, laipsniu. Pavyzdžiui, $2 = 3^{\log_3 2}$, $2 = 5^{\log_5 2}$, $2 = 10^{\lg 2}$ ir t. t.

Pratimai ir uždaviniai

124. Nustatykite, kurios lygybės yra teisingos:

a) $\log_2 32 = 5$; b) $\log_5 0{,}2 = -1$; c) $\log_3 \frac{1}{27} = \frac{1}{3}$;
d) $\log_7 1 = 7$; e) $\log_7 1 = 0$; f) $\lg 0{,}1 = -1$.

125. Raskite skaičiaus logaritmą pagrindu a:

a) $5^2 = 25$, $a = 5$; b) $7^2 = 49$, $a = 7$; c) $10^3 = 1000$, $a = 10$;
d) $3^{-2} = \frac{1}{9}$, $a = 3$; e) $2^{-3} = 0{,}125$, $a = 2$; f) $10^{-2} = 0{,}01$, $a = 10$;
g) $\sqrt[3]{8} = 2$, $a = 8$; h) $\sqrt{121} = 11$, $a = 121$; i) $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, $a = 0{,}25$.

Pavyzdys. $3^2 = 9$, taigi $\log_3 9 = 2$; $\sqrt[3]{125} = 5$, taigi $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$.

126. Apskaičiuokite remdamiesi pagrindine logaritmų tapatybe:

a) $7^{\log_7 3}$; b) $10^{\lg 4}$; c) $7{,}5^{\log_{7,5} 3}$; d) $\pi^{\log_\pi 3{,}14}$;
e) $10^{\lg 0{,}5}$; f) $10^{\lg 10}$; g) $25^{\log_5 2}$; h) $16^{\log_4 5}$;
i) $2^{\log_8 7}$; j) $100^{\lg 30}$; k) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{0,2} 4}$; l) $0{,}25^{\log_{\frac{1}{4}} 10}$.

127. Raskite skaičių 0,04; 0,2; 1; 5; 25; 125 logaritmus pagrindu 5.

128. Raskite skaičių 0,001; 0,01; 0,1; 1; 10; 100 logaritmus pagrindu 10.

129. Remdamiesi logaritmo apibrėžimu raskite x:

a) $\log_x 81 = 4$; b) $\log_x 0{,}25 = 2$; c) $\log_6 x = 3$;

d) $\lg x = 6$; e) $\log_{\sqrt{3}} 27 = x$; f) $\log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{32} = x$;

g) $\lg 0{,}001 = x$; h) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{81} = x$; i) $\log_6 x = 0$.

130. Nustatykite, tarp kurių gretimų sveikųjų skaičių yra:

a) $\log_3 15$; b) $\log_4 \frac{1}{2}$; c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$; d) $\log_{0,1} 100$.

13.2. Logaritmų savybės

Išvardysime ir įrodysime pagrindines logaritmų savybes. Jomis paranku naudotis pertvarkant įvairius reiškinius su logaritmais.

Tegu x ir y yra du teigiami skaičiai, $a > 0, a \neq 1$. Tada teisingos šios lygybės:

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, *t. y. sandaugos logaritmas lygus logaritmų sumai;*

2) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, *t. y. dalmens logaritmas lygus logaritmų skirtumui.*

3) *Jei $x > 0$, o $a > 0$, $a \neq 1$, tai su bet kokiu skaičiumi k teisinga lygybė* $\log_a x^k = k \log_a x$, *t. y. laipsnio logaritmas lygus laipsnio rodiklio ir laipsnio pagrindo logaritmo sandaugai.*

Įrodysime 1) ir 2) lygybes kartu. Pasinaudosime šiomis lygybėmis:

$$a^{\log_a x} = x, \quad a^{\log_a y} = y, \quad a^{\log_a(xy)} = xy, \quad a^{\log_a(\frac{x}{y})} = \frac{x}{y}. \tag{1}$$

Padauginę (padalinę) pirmųjų dviejų lygybių kairiąsias ir dešiniąsias puses gausime:

$$a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy \quad \text{arba} \quad a^{\log_a x + \log_a y} = xy;$$

$$\frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = \frac{x}{y} \quad \text{arba} \quad a^{\log_a x - \log_a y} = \frac{x}{y}.$$

Tačiau (1) eilutėje reiškinius xy ir $\frac{x}{y}$ išreiškėme kitu būdu. Sulyginę atitinkamas puses gausime:

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a(xy)}, \quad \text{t. y.} \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;$$

$$a^{\log_a x - \log_a y} = a^{\log_a(\frac{x}{y})}, \quad \text{t. y.} \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

Įrodysime 3) savybę. Pakėlę abi lygybės $a^{\log_a x} = x$ puses k-uoju laipsniu gausime:

$$a^{k \log_a x} = x^k.$$

Kita vertus $x^k = a^{\log_a x^k}$, taigi $a^{\log_a x^k} = a^{k \log_a x}$, arba $\log_a x^k = k \log_a x$.

Naudojantis įrodytomis logaritmų savybėmis galima prastinti skaitinių reiškinių logaritmus.

1 PAVYZDYS. Apskaičiuokime reiškinio $\lg(30 \cdot \sqrt{1000})$ reikšmę, jei $\lg 3 \approx 0{,}477$. Pasinaudosime skaičių sandaugos ir skaičiaus laipsnio logaritmo savybėmis:

$$\lg(30 \cdot \sqrt{1000}) = \lg 30 + \lg \sqrt{1000} = \lg(3 \cdot 10) + \lg (10^3)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \lg 3 + \lg 10 + \lg 10^{\frac{3}{2}} = \lg 3 + 1 + \frac{3}{2}\lg 10 = \frac{5}{2} + \lg 3 \approx 2{,}977.$$

3 užduotis. Apskaičiuokite $\lg \frac{75}{\sqrt[3]{3}}$ pasinaudodami apytikslėmis lygybėmis $\lg 3 \approx \approx 0{,}477$, $\lg 5 \approx 0{,}699$.

Jeigu reikėtų suskaičiuoti $\log_{10\sqrt{10}} 5$ reikšmę, tikriausiai pagalvotume: kaip būtų gerai, jei logaritmas būtų dešimtainis! Paspaudę kelis skaičiuoklio mygtukus kaipmat išspręstume uždavinį!

Taigi kartais skaičiuojant tenka keisti logaritmo pagrindą.

Įrodysime dvi lygybes, kuriomis galima pasinaudoti keičiant logaritmų pagrindą.

4) *Bet kokiems* $x > 0$, $k \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ *teisinga lygybė* $\log_a x = \log_{a^k} x^k$, *t. y. keliant skaičių ir logaritmo pagrindą tuo pačiu laipsniu pats logaritmas nepasikeičia.*

5) *Su bet kokiais skaičiais* $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ *ir* $x > 0$ *teisinga lygybė* $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Įrodysime 4) savybę. Pakelkime abi lygybės

$$a^{\log_a x} = x \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$$

puses k-uoju laipsniu ($k \neq 0$):

$$\left(a^{\log_a x}\right)^k = x^k \quad \text{arba} \quad \left(a^k\right)^{\log_a x} = x^k.$$

Tačiau pastaroji lygybė reiškia, kad

$$\log_{a^k} x^k = \log_a x.$$

Įrodysime 5) lygybę pasinaudodami 3) ir 4) savybėmis. Skaičių a užrašę $a = b^{\log_b a}$ ir pasinaudoję tuo, kad $\log_b a \neq 0$ (nes $a \neq 1$), gausime

$$\log_a x = \log_{b^{\log_b a}} x = \log_{\left(b^{\log_b a}\right)^{\frac{1}{\log_b a}}} x^{\frac{1}{\log_b a}} =$$
$$= \log_b x^{\frac{1}{\log_b a}} = \frac{1}{\log_b a}\log_b x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

2 PAVYZDYS. Pasinaudokime 4) savybe ir apskaičiuokime $\log_{10\sqrt{10}} 5$:

$$\log_{10\sqrt{10}} 5 = \log_{(10\sqrt{10})^2} 5^2 = \log_{10^3} 5^2 = \log_{(10^3)^{1/3}} (5^2)^{\frac{1}{3}} =$$
$$= \log_{10} 5^{2/3} = \frac{2}{3} \lg 5 \approx \frac{2}{3} \cdot 0{,}699 = 0{,}466.$$

4 užduotis. Išreikškite skaičių $\log_{\frac{\sqrt[3]{10}}{10}} 7$ dešimtainiu logaritmu.

3 PAVYZDYS. Suraskime apytikslę lygties $5^x = 3$ sprendinio reikšmę pasinaudodami tuo, kad $\lg 3 \approx 0{,}477$, $\lg 5 \approx 0{,}699$.
Pasinaudoję logaritmais užrašykime lygties sprendinį: $x = \log_5 3$. Pasinaudoję 5) savybe gauname

$$x = \log_5 3 = \frac{\lg 3}{\lg 5} \approx 0{,}682.$$

Pratimai ir uždaviniai

131. Pakeiskite logaritmų suma arba skirtumu:

a) $\log_7(5a)$; b) $\log_b(4b)$; c) $\log_5 120$; d) $\lg 150$; e) $\lg \frac{10}{n}$;
f) $\log_5 \frac{4}{5}$; g) $\log_6 \frac{36}{7}$; h) $\log_3 \frac{0{,}17}{9}$; i) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{0{,}25}{7}$; j) $\log_3 \frac{\sqrt{3}}{5}$.

132. Apskaičiuokite:

a) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$; b) $\lg 4 + \lg 25$; c) $\lg 8 + \lg 125$;
d) $\lg 17 - \lg 170$; e) $\log_4 160 - \log_4 40$; f) $\log_{0,2} 25 - \log_{0,2} 125$.

133. Koks skaičius turėtų būti parašytas vietoj daugtaškio, kad būtų teisinga lygybė:

a) $\log_{11} 2^3 = \ldots \log_{11} 2$; b) $\lg 5^5 = \ldots \lg 5$; c) $\log_6 \sqrt{5} = \ldots \log_6 5$;
d) $\log_7 \sqrt[3]{3} = \ldots \log_7 3$; e) $\frac{1}{3} \log_{\sqrt{5}} 3 = \log_{\sqrt{5}} 3^{\cdots}$; f) $\frac{1}{2} \lg 7 = \lg 7^{\cdots}$?

134. Raskite reiškinio logaritmą pagrindu 5:

a) $5a^3\sqrt{m}$; b) $\frac{x^2}{25y}$; c) $\frac{1}{5}a^4 b^{\frac{1}{3}} c^{-2}$; d) $\frac{125\sqrt{9}}{\sqrt[3]{ab}}$.

135. Raskite reiškinio logaritmą pagrindu 10:

a) $10x^2y^{-5}$; b) $\frac{3a^{10}}{100}$; c) $\sqrt{1000a^3b}$; d) $\frac{m^5 k^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{10}}$.

136. Raskite x reikšmę iš lygčių:

a) $\log_3 x = \log_3 b + \frac{1}{2} \log_3(a + b) - 4 \log_3(a - b)$;
b) $\log_5 x = -2 \log_5 a + 2 \log_5 b - \frac{1}{3} \log_5 m$;
c) $\lg x = \lg 7 - \lg a - \lg b$;
d) $\lg x = -\frac{1}{3} \lg m - \frac{1}{2} \lg n - \frac{1}{3} \lg c$.

137. Užpildykite lentelę:

$a =$	$\log_8 3$	$\log_4 7$	$\log_3 20$	$\log_{\frac{1}{5}} 4$	$\log_{0,1} 8$	$\lg 3$
Naujasis pagrindas	5	10	2	3	10	8
$a =$	$\frac{\log_5 3}{\log_5 8}$					

138. Apskaičiuokite:
a) $\log_3(\log_2 8)$; b) $\log_2(\log_3 81)$.

139. Apskaičiuokite:

a) $\sqrt{\log_4 256}$; b) $\log_3 \sqrt{81}$; c) $\log_3^2 9$;

d) $\log_2^3 16$; e) $\log_3 9^2$; f) $\log_2 16^3$.

140. Raskite skaičiaus dešimtainį logaritmą:

a) 10^3; 100; $0{,}0001$; $\sqrt{1000}$; b) 10^{-6}; $10\,000$; $0{,}1\sqrt[4]{1000}$;

c) $10^{\frac{1}{5}}$; $\frac{1}{100}$; $\sqrt[4]{0{,}001}$; d) 1; $\sqrt{0{,}1}$; $\frac{\sqrt{10}}{100}$.

141. Išreikškite kintamąjį y kintamuoju x:

a) $x = 10 \cdot 2^y$; b) $x = 5^{y+1}$; c) $x = 6^{1-y}$; d) $x = \frac{\sqrt{10}}{5^{y-2}}$.

142. Suprastinkite reiškinį:
$\log_a \frac{2}{1} + \log_a \frac{3}{2} + \dots + \log_a \frac{n+1}{n}$.

143. Nustatykite reiškinio ženklą:

a) $\lg 245$; $\lg 2{,}45$; $\lg \frac{\sqrt{11}}{4}$; $\lg(0{,}6)^{-6}$;

b) $\lg 1{,}5^2$; $\lg 0{,}96$; $\lg 2{,}5^{-0{,}25}$; $\lg \frac{\sqrt{53}}{7}$;

c) $\lg \frac{2\sqrt{6}}{5}$; $\lg \sqrt[3]{1{,}03}$; $\lg(\sqrt{75} - 8)$; $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

144. Pasinaudodami tuo, kad $\lg 4 \approx 0{,}6$, $\lg 5 \approx 0{,}7$ ir $\lg 6 \approx 0{,}8$, apskaičiuokite reiškinio reikšmę:

a) $\lg(5 \cdot \sqrt{10})$; b) $\lg \frac{5}{1000}$; c) $\lg \frac{36}{\sqrt[4]{4}}$;

d) $\lg(\sqrt[3]{6} \cdot 64)$; e) $\log_{\sqrt{10}} 4$; f) $\log_{1000} \sqrt{5}$;

g) $\log_{100\sqrt{10}} 24$; h) $\log_{\sqrt[3]{10}} 20$; i) $\log_5 \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Apskaičiuokite a) ir b) reiškinių reikšmes naudodamiesi skaičiuokliu. Palyginkite abiem būdais apskaičiuotas reiškinių reikšmes.

13.3. Logaritminė funkcija ir jos savybės

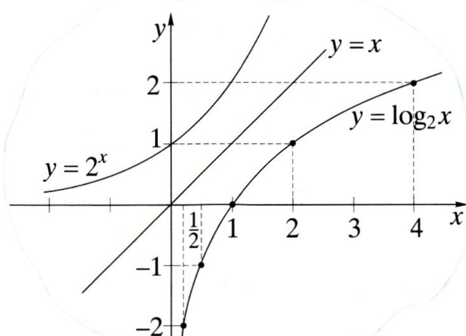
Rodiklinė funkcija $f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ yra apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje ir įgyja tik teigiamas reikšmes. Kai $a > 1$, tai visoje apibrėžimo srityje funkcija didėja, kai $0 < a < 1$ — mažėja. Visos didėjančios ir visos mažėjančios funkcijos turi atvirkštines. Taigi kiekviena rodiklinė funkcija turi atvirkštinę funkciją, apibrėžtą teigiamų skaičių aibėje.

Panagrinėkime iš pradžių funkciją $y = 2^x$. Jei žinome priklausomo kintamojo y reikšmę, tai ją atitinkanti x reikšmė yra y logaritmas pagrindu 2, taigi $x = \log_2 y$. Ši lygybė apibrėžia funkcijos $y = 2^x$ atvirkštinę. Pažymėję, kaip įprasta, nepriklausomą kintamąjį x, o priklausomą — y užrašysime šią funkciją taip: $y = \log_2 x$ arba $g(x) = \log_2 x$. Ši funkcija kiekvienam teigiamam skaičiui x priskiria jo logaritmą pagrindu 2, todėl ją vadinsime logaritmine.

APIBRĖŽIMAS
Tegu $a > 0, a \neq 1$. Funkcija, apibrėžta teigiamų skaičių aibėje lygybe $y = \log_a x$, vadinama logaritmine funkcija su pagrindu a.

Logaritminė funkcija $g(x) = \log_a x$ yra funkcijos $f(x) = a^x$ atvirkštinė.

Nubraižykime funkcijos $y = \log_2 x$ grafiką.
Funkcija $y = \log_2 x$ yra atvirkštinė funkcijai $y = 2^x$, todėl jos grafikas yra simetriškas funkcijos $y = 2^x$ grafikui tiesės $y = x$ atžvilgiu. Atidėkime kelis $y = \log_2 x$ grafiko taškus ir nubrėžkime per juos grafiko kreivę.



x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2

Funkcija $g(x) = \log_2 x$ didėja visoje apibrėžimo srityje. Matome, kad $g(x) = \log_2 x$ įgyja neigiamas reikšmes, kai $0 < x < 1$; kai $x = 1$, tai $g(x) = 0$; kai $1 < x < 2$, tai $0 < g(x) < 1$ ir $g(x) \geqslant 1$, kai $x \geqslant 2$.

1 užduotis. Nubraižykite funkcijos $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ grafiką ir naudodamiesi juo — funkcijos $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ grafiką. Pasirėmę grafiku išvardykite funkcijos $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ savybes.

Jei $a > 1$, tai funkcijos $y = \log_a x$ grafikas panašus į funkcijos $y = \log_2 x$ grafiką; jei $0 < a < 1$ — į funkcijos $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ grafiką.

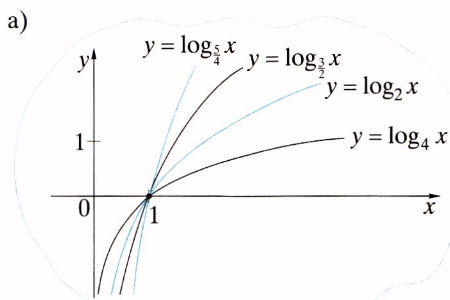
Bet kurios logaritminės funkcijos $y = \log_a x$ grafiką galima gauti atitinkamai transformuojant funkcijos $y = \log_2 x$ grafiką. Iš tiesų, pritaikę formulę $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ su $b = 2$ gausime, kad

$$y = \log_a x = \left(\frac{1}{\log_2 a}\right) \cdot \log_2 x \quad (a > 0, a \neq 1).$$

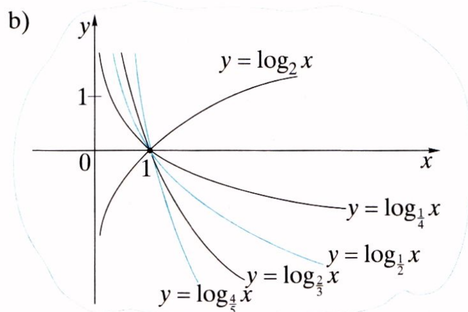
Taigi funkcijos $y = \log_a x$ grafiko taškai gaunami iš funkcijos $y = \log_2 x$ grafiko taškų nekeičiant jų abscisių, o ordinates dauginant iš konstantos $\frac{1}{\log_2 a}$.

Jei $a > 2$, tai $\log_2 a > 1$, $0 < \frac{1}{\log_2 a} < 1$ ir norint $y = \log_a x$ grafiką gauti iš $y = \log_2 x$ grafiko pastarąjį reikės „suspausti“. Kai $1 < a < 2$, tai $0 < \log_2 a < 1$, $\frac{1}{\log_2 a} > 1$ ir grafiką reikės „ištempti“, žr. a) brėžinį.

a)

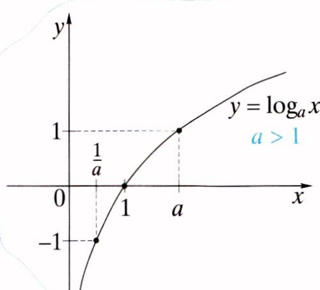


b)

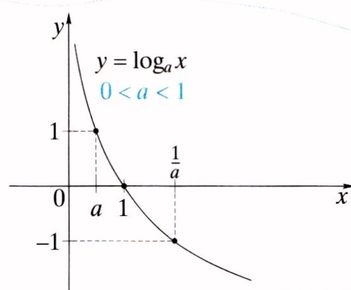


Norėdami gauti iš $y = \log_2 x$ grafiko funkcijos $y = \log_a x$ grafiką, kai $0 < a < 1$, turėtume iš pradžių „suspausti“ ar „ištempti“ grafiką, o po to — atvaizduoti jį simetriškai Ox ašies atžvilgiu, žr. b) brėžinį.

2 užduotis. Įrodykite, kad funkcijų $y = \log_2 x$ ir $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ grafikai yra simetriški tiesės $y = 0$ atžvilgiu.



$\log_a a = 1$
$\log_a \frac{1}{a} = -1$



Logaritminė funkcija $g(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) apibrėžta teigiamų skaičių aibėje, jos reikšmių aibė — visų realiųjų skaičių aibė. Kai $a > 1$, funkcija didėja, kai $0 < a < 1$ — mažėja.

Žinome, kaip nelengva dauginti ar dalyti skaičius su daugeliu skaitmenų! Būtent skaičiavimams palengvinti ir buvo sugalvoti logaritmai. Pirmąsias skaičių logaritmų lenteles sudarė šveicaras J. Biurgis (1552–1632) ir škotas J. Neperis (1550 – 1617). Jeigu turime geras skaičių logaritmų lenteles, teigiamų skaičių a ir b sandaugą galime rasti taip: suradę lentelėse lg a ir lg b apskaičiuojame sumą lg a + lg b ir surandame lentelėse, kokio tai skaičiaus logaritmas. Šis skaičius ir bus sandauga a · b!

Pratimai ir uždaviniai

145. Raskite funkcijos apibrėžimo sritį:

a) $f(x) = \log_3(x + 10)$; b) $f(x) = \lg(x - 10)$;

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3 - x)$; d) $f(x) = \log_3(2 - 5x)$;

e) $f(x) = \lg(3 + x^2)$; f) $f(x) = \log_2(4 - x^2)$;

g) $f(x) = \log_\pi(x^2 - 2x + 3)$; h) $f(x) = \log_{\sqrt{3}}(6 + x - x^2)$;

i) $f(x) = \log_3 \frac{4-x}{2+x}$; j) $f(x) = \log_{0,3} \frac{2-x}{x+4}$.

146. Pasirinkite teisingą atsakymą.

a) Funkcijos $y = \log_{\sqrt{2}}(2 - x^2)$ apibrėžimo sritis yra:

A $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$
B $(-\infty; -\sqrt{2})$
C $[\sqrt{2}; +\infty)$
D $(-\infty; +\infty)$, $x \neq \sqrt{2}$
E $(0; \sqrt{2})$

b) Funkcijos $y = \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 3)$ apibrėžimo sritis yra:

A $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$
B $(0; -\sqrt{3})$
C $(\sqrt{3}; +\infty)$
D $(-\infty; -\sqrt{3})$
E $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$

147. Toje pačioje koordinačių sistemoje nubraižykite funkcijų $f(x) = 5^x$ ir $g(x) = \log_5 x$ grafikus. Pasakykite, kokios tiesės atžvilgiu jie yra simetriški. Paaiškinkite, kodėl.

148. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką ir išvardykite jos savybes:

a) $f(x) = \log_3 x$; b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$; c) $f(x) = \lg x$;

d) $f(x) = \log_2(x + 3)$; e) $f(x) = \log_3(x - 2)$; f) $f(x) = \lg(-x)$.

149. Naudodamiesi grafiku nustatykite, ar lygtis turi sprendinių. Jei lygtis turi sprendinių, tai nurodykite jų skaičių:

a) $\lg x = 2x + 1$; b) $\lg x = -\frac{1}{2}x - 2$;

c) $\lg x = 1 - \frac{1}{2}x$; d) $\lg x = x^2 - 4$.

150. Išspręskite lygtį grafiškai:

a) $\log_2 x = x - 3$; b) $\log_2 x = \frac{x}{2}$;

c) $\log_2(x + 3) = 3 - x$; d) $\log_2(x - 5) = x - 5$.

151. Su kuriomis x reikšmėmis teisinga lygybė:

a) $\log_2\big((x-2)(x+2)\big) = \log_2(x-2) + \log_2(x+2)$;

b) $\lg \frac{x-3}{x+10} = \lg(x-3) - \lg(x+10)$?

152. Kurie iš taškų $\left(\frac{1}{4}; -1\right)$; $(16; 2)$; $(2; 16)$; $(3; 3)$; $\left(\frac{1}{64}; -3\right)$; $(0; 1)$ priklauso funkcijos $f(x) = \log_4 x$ grafikui?

153. Nustatykite, su kuriomis x reikšmėmis teisinga nelygybė:

a) $\log_x 5 < \log_x 10$;

b) $\log_x 10 < \log_x 5$;

c) $\log_x \frac{3}{2} > \log_x \frac{1}{3}$;

d) $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$.

154. Remdamiesi funkcijos $f(x) = \log_a x$ grafiku (kai $a > 1$ arba $0 < a < 1$) nustatykite šių skaičių ženklus:

$\log_2 7$; $\log_3 8$; $\log_{\frac{1}{2}} 5$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$; $\log_{0,3} 0{,}4$; $\lg 0{,}1$; $\lg 100$.

155. Palyginkite:

a) $\log_3 6$ ir $\log_3 2$;

b) $\log_{0,2} 6$ ir $\log_{0,2} 2$;

c) $\log_3 4 + \log_3 7$ ir $\log_3(4+7)$;

d) $\log_{0,2} 2{,}5 + \log_{0,2} 4$ ir $\log_{0,2} 10$;

e) $\lg 24 - \lg 6$ ir $\lg 4$;

f) $\log_{\frac{1}{5}} 28$ ir $\log_{\frac{1}{5}} 84 - \log_{\frac{1}{5}} 3$.

156. Kas daugiau:

a) $\frac{\lg 5 + \lg 9}{2}$ ar $\lg \frac{5+9}{2}$,
$\frac{\lg 6 + \lg 7}{2}$ ar $\lg \frac{7+6}{2}$,
$\lg 15 - \lg 3$ ar $\frac{1}{2} \lg 26$;

b) $2 \lg 5$ ar $5 \lg 2$,
$\frac{1}{2} \lg 90$ ar $2 \lg 3$,
$\lg 2 + \lg 7$ ar $\frac{1}{2} \lg 200$;

c) $3 \lg 3$ ar $\frac{1}{2} \lg 30$,
$\frac{1}{2} \lg 18$ ar $\lg 5{,}5$,
$\frac{1}{2} \lg 615$ ar $2 \lg 5$?

157. Su kuriomis x reikšmėmis funkcija $f(x)$ įgyja reikšmes $-1, 0, 2$, jei:

a) $f(x) = \lg(6x - 14)$;

b) $f(x) = \log_2(x^2 - 4)$;

c) $f(x) = \lg \frac{x}{x+2}$;

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} \frac{x+1}{x}$?

158. Kokios turi būti x reikšmės, kad būtų teisingos nelygybės:

a) $\log_5 x < \log_7 x$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{3}} x$;

c) $\log_2 x > \log_{\frac{1}{3}} x$;

d) $\log_\pi x < \log_{3,14} x$;

e) $\log_{2x} 5 > \log_{2x} 7$;

f) $\log_{\frac{1}{x}} \pi < \log_{\frac{1}{x}} 3$?

13.4. Logaritminės lygtys

Jei žinome skaičiaus logaritmą, tai galime rasti ir patį skaičių. Pavyzdžiui, jei

$$\log_2 x = 2,$$

tai pasirėmę logaritmo apibrėžimu gausime

$$x = 2^2 = 4.$$

Išsprendėme paprastą lygtį, kurioje nežinomasis yra po logaritmo ženklu. Panašiai spręstume ir lygtį $\log_x 8 = 3$. Kadangi $x^3 = 8$, tai $x = 2$.

Lygtis, kuriose nežinomasis yra logaritmo pagrindo arba logaritmo reiškinyje, vadinsime *logaritminėmis*.

Panagrinėsime daugiau pavyzdžių.

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį:
a) $\log_3(x-5) = 2$; b) $\lg(\lg x) = 0$; c) $\log_{x-1} 4 = 2$; d) $\lg x + \lg(4x) = 2$.

a) Pasinaudoję logaritmo apibrėžimu gauname

$(x-5) = 3^2$, t. y. $x - 5 = 9$ ir $x = 14$.

Pastebėkime, kad spręsdami lygtį pakeitėme ją lygtimi, kurios apibrėžimo sritis yra „didesnė“: lygtis $\log_3(x-5) = 2$ apibrėžta tik su tais x, kuriems $x - 5 > 0$, o lygtis $x - 5 = 9$ — su visomis x reikšmėmis. Taigi būtina patikrinti, ar gautasis skaičius tikrai yra pradinės lygties sprendinys.

Patikrinkime: $\log_3(14-5) = \log_3 9 = 2$; taigi $x = 14$ iš tiesų yra lygties sprendinys.

b) Šią lygtį sprendžiame taip pat naudodamiesi tik logaritmo apibrėžimu:

$\lg(\lg x) = 0$, tai $\lg x = 10^0$ ir $\lg x = 1$, $x = 10^1 = 10$.

Patikrinimas: $\lg(\lg 10) = \lg 1 = 0$. Lygties sprendinys tikrai yra $x = 10$.

c) Naudodamiesi logaritmo apibrėžimu gauname:

$(x-1)^2 = 4$.

Ši lygtis apibrėžta su visomis x reikšmėmis, o pradinė — tik su tokiais x, kuriems $x - 1 > 0, x - 1 \neq 1$. Iš lygties $(x-1)^2 = 4$ gauname, kad $x - 1 = 2$ arba $x - 1 = -2$, t. y. $x = 3$ arba $x = -1$. Patikrinę įsitikiname, kad reikšmė $x = -1$ nėra lygties sprendinys, o $x = 3$ tenkina lygtį.

d) Lygties $\lg x + \lg(4x) = 2$ apibrėžimo sritis — teigiamųjų skaičių aibė, todėl jei gausime neigiamą nežinomojo reikšmę, galėsime ją iš karto atmesti. Kairėje lygties pusėje yra dviejų reiškinių logaritmų tuo pačiu pagrindu suma. Ši suma lygi sandaugos logaritmui:

$\lg(x \cdot 4x) = 2$ ir $4x^2 = 100$.

Gauname dvi nežinomojo reikšmes: $x_1 = 5$ ir $x_2 = -5$. Neigiamą galime iš karto atmesti, o $x = 5$ yra pradinės logaritminės lygties sprendinys, nes $\lg 5 + \lg(4 \cdot 5) = \lg(5 \cdot 4 \cdot 5) = \lg 100 = 2$.

Išsprendus logaritminę lygtį reikia patikrinti, ar gautosios nežinomojo reikšmės tikrai yra lygties sprendiniai. Galima prieš sprendžiant nustatyti logaritminės lygties apibrėžimo sritį ir gavus nežinomojo reikšmes iš karto atmesti tas, kurios į šią sritį neįeina.

1 užduotis. Išspręskite lygtį $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0$ pakeitę nežinomąjį: $y = \log_2 x$.

Dažnai logaritminę lygtį galima pakeisti racionaliąja pasinaudojus tokiu teiginiu: jeigu skaičių logaritmai tuo pačiu pagrindu yra lygūs, tai ir skaičiai yra lygūs.

2 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $\log_5(2x+3) = \log_5(x+1)$.
Kadangi reiškinių logaritmai yra lygūs, tai ir reiškiniai turi būti lygūs:

$$2x + 3 = x + 1, \quad x = -2.$$

Tikriname: įstatę į kairiąją lygties pusę gauname $\log_5(2\cdot(-2)+3) = \log_5(-1)$. Tačiau neigiamųjų skaičių logaritmai nėra apibrėžti, todėl lygtis sprendinių neturi.

Sprendžiant šią lygtį, buvo galima nustatyti jos apibrėžimo sritį, t. y. išspręsti nelygybių sistemą, kurią sudarome atsižvelgdami į tai, kad logaritmas egzistuoja tik su teigiamais skaičiais. Lygties $\log_5(2x+3) = \log_5(x+1)$ apibrėžimo sritį nusako nelygybių sistema:

$$\begin{cases} 2x+3>0, \\ x+1>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-\frac{3}{2}, \\ x>-1; \end{cases} \quad x>-1.$$

Taigi lygtis apibrėžta tik su $x > -1$, todėl reikšmę $x = -2$ galima nė netikrinus iš karto atmesti.

Pasitaiko lygčių, kuriose nežinomasis įeina ir į laipsnio pagrindo ir į rodiklio reiškinius. Kartais jas išspręsti padeda toks akivaizdus teiginys: jeigu du teigiami skaičiai yra lygūs, tai ir jų logaritmai tuo pačiu pagrindu yra lygūs.

3 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $x^{\log_3 x - 1} = 9$.
Lygties kairiosios pusės reiškinio logaritmas bet kuriuo pagrindu lygus dešinėje pusėje parašyto skaičiaus logaritmui tuo pačiu pagrindu. Aišku, kad patogiausia pasirinkti pagrindą lygų 3:

$$\log_3 x^{\log_3 x - 1} = \log_3 9.$$

Pasinaudoję logaritmų savybėmis gauname: $(\log_3 x - 1)\log_3 x = \log_3 9$.
Pažymėję $\log_3 x = m$, gausime lygtį $(m-1)m = 2$, t. y. $m^2 - m - 2 = 0$. Šios lygties sprendiniai yra $m_1 = -1$ ir $m_2 = 2$.
Kadangi $m = \log_3 x$, tai $\log_3 x = -1$ ir $\log_3 x = 2$, $x = 3^{-1}$ ir $x = 3^2$, $x = \frac{1}{3}$ ir $x = 9$. Įstatę šias reikšmes į lygtį galime įsitikinti, kad abi jos yra lygties sprendiniai.

Kai spręsdami lygtį $f(x) = g(x)$, kurios abiejose pusėse yra teigiami reiškiniai, keičiame ją lygtimi $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, dažnai sakome, kad lygtį *logaritmuojame pagrindu a*.

Kai logaritminėje lygtyje yra keli logaritmai su skirtingais pagrindais, pravartu pereiti prie logaritmų tuo pačiu pagrindu.

4 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $\log_4 x + \log_{16} x = 3$.

Pasinaudoję logaritmų savybe $\log_a x = \log_{a^k} x^k$ $(k \neq 0)$ logaritmą pagrindu 4 parašysime taip:

$$\log_4 x = \log_{4^2} x^2 = \log_{16} x^2.$$

Taigi dabar galime spręsti tokią lygtį:

$$\log_{16} x^2 + \log_{16} x = 3,$$

$$\log_{16}(x^2 \cdot x) = 3, \quad \log_{16} x^3 = 3,$$

$$x^3 = 16^3, \quad x = 16.$$

Patikrinimas: $\log_4 16 + \log_{16} 16 = 2 + 1 = 3$.

Taigi $x = 16$ yra lygties sprendinys.

2 užduotis. Išspręskite lygtį $\log_4 x + \log_{16} x = 3$ kitaip: logaritmą pagrindu 16 išreikškite logaritmu pagrindu 4. Kuris būdas jums labiau patinka?

Pratimai ir uždaviniai

159. Išspręskite lygtį:

a) $\log_4(3 - 3x) = 2$; b) $\lg(x - 2) = 3$; c) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 2) = -2$;

d) $\log_{0,2}(\frac{x}{3}) = -1$; e) $\lg(\log_3(\log_2 x)) = 0$; f) $\log_\pi(\log_2(\log_6 x)) = 0$.

160. Raskite logaritminės lygties sprendinius:

a) $\log_4(x + 3) - \log_4(x + 1) = 2 - \log_4 8$;

b) $\log_3(x - 1) - \log_3(x + 5) = \log_3 9 - 3$;

c) $\frac{\lg x}{\lg(5x-6)} = \frac{1}{2}$;

d) $\frac{2 \lg x}{\lg(7x-6)} = 1$;

e) $\frac{\log_2 x - \log_2 3}{\log_2 x - \log_2 2} = \frac{1}{2}$;

f) $\frac{\log_4 4 - \log_4 x}{\log_4 x + \log_4 4} = \frac{1}{3}$;

g) $\lg(3x^2 + 7) - 1 = \lg(3x - 2)$;

h) $\lg(5x^2 + 2x - 1) - 1 = \lg(x + 2)$.

161. Išspręskite lygtį pakeitę nežinomąjį:

a) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$; b) $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 8 = 0$;

c) $\log_5^2 x - \log_5 x^5 + 6 = 0$; d) $\lg^2 x + \lg x^3 = 4$.

162. Išspręskite lygtį taikydami formulę: $\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$.

a) $\log_3 x + \log_{27} x = 4$;
b) $\log_2 x + \log_{16} x = 5$;
c) $\log_5 x + \frac{1}{2}\log_{0,2} x = 1$;
d) $\log_4 x - \frac{1}{3}\log_{0,25} x = 2\frac{2}{3}$;
e) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x - 7 = 0$;
f) $\log_{81} x + \log_{27} x - \log_3 x + \frac{5}{6} = 0$.

163. Išspręskite lygtį logaritmuodami abi jos puses:

a) $x^{\log_5 x} = 5$; b) $x^{\lg\sqrt{x}} = 100$; c) $x^{\log_7 x} = 49$; d) $x^{\lg x} = 100$.

164. Raskite logaritminės lygties sprendinius:

a) $\log_{x+1} 9 + \log_{x+1} 4 = 2$;
b) $\log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 = 0{,}5$;
c) $\log_x(2x^2 + x - 12) = 2$;
d) $\log_x(2x^2 - 2x - 3) = 2$;
e) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 10) = 2$;
f) $\log_{x+1}(2x^2 + 4x - 14) = 2$;
g) $\log_{x-2}(2x^2 - 11x + 16) = 2$;
h) $\log_{x-1}(2x^2 - 9x + 11) = 2$.

165. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5, \\ \log_2 x - \log_2 y = 3; \end{cases}$
b) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 7, \\ \lg x - \lg y = 5; \end{cases}$
c) $\begin{cases} \lg x - \lg y = -1, \\ x^2 - y = 0; \end{cases}$
d) $\begin{cases} \lg x - \lg y = -2, \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$

166. Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos $f(x)$ reikšmės lygios nuliui, jei:

a) $f(x) = \lg 35 + \lg(2x - 6) - \lg 3{,}5$;
b) $f(x) = \lg(5 + 2x) - \lg 27 + \lg 9$;
c) $f(x) = \lg 0{,}5 + \lg 0{,}8 + \lg(15 - 0{,}4x)$;
d) $f(x) = \lg(0{,}05x - 10) + \lg 0{,}7 - \lg 42$?

167. Raskite taškų, kuriuose kertasi funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikai, abscises, jei:

a) $f(x) = \lg(x - 1)$ ir $g(x) = \lg 1 + \frac{1}{2}\lg(7x + 1)$;
b) $f(x) = \lg(x + 6) - 2$ ir $g(x) = \frac{1}{2}\lg(2x - 3) - \lg 25$;
c) $f(x) = 3^{\lg x} - 6$ ir $g(x) = 3^{\lg x - 1}$;
d) $f(x) = 2^{\lg x - 2}$ ir $g(x) = 2^{\lg x} - 3$.

168. Raskite lygties sprendinius:

a) $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} = 1$;
b) $\frac{1}{5-4\lg x} + \frac{4}{1+\lg x} = 3$;
c) $\lg(3^x - 1) + \lg(3^x - 2) = 1 - \lg 5$;
d) $\lg(2^x - 1) + \lg(2^x - 2) = \lg 6$.

13.5. Logaritminės nelygybės

Pradėkime nuo paprastų nelygybių, kuriose nežinomasis yra po logaritmo ženklu.

1 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę:

a) $\log_2 x < \log_2 5$; b) $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 5$.

a) Kadangi logaritmus turi tik teigiami skaičiai, tai nelygybės apibrėžimo sritis yra intervalas $(0; +\infty)$. Prisiminę, kad funkcija $f(x) = \log_2 x$ yra didėjanti, galime iš karto parašyti, kad nelygybės

$\log_2 x < \log_2 5$

sprendinių aibę sudaro x reikšmės, tenkinančios nelygybių sistemą

$\begin{cases} x > 0, \\ x < 5; \end{cases}$ t. y. sprendinių aibė yra intervalas $(0; 5)$.

Panašiai samprotaudami gautume, kad nelygybės $\log_2 x > \log_2 5$ sprendinių aibė yra intervalas $(5; +\infty)$.

b) Nelygybę

$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 5$

sprendžiame remdamiesi tuo, kad funkcija $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ yra mažėjanti. Taigi nelygybės sprendinius surasime iš nelygybių sistemos

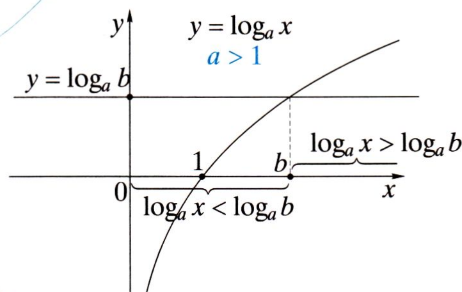
$\begin{cases} x > 0, \\ x > 5; \end{cases}$ t. y. sprendinių aibė yra intervalas $(5; +\infty)$.

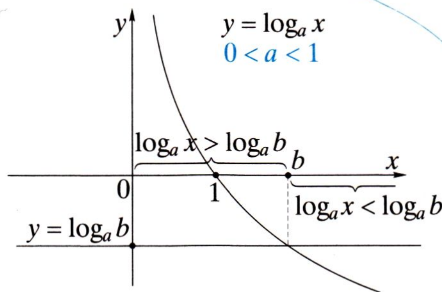
Savo ruožtu nelygybės $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 5$ sprendinius sudaro intervalo $(0; 5)$ skaičiai.

Šitaip sprendžiame ir kitas nelygybes

$\log_a x > \log_a b, \quad \log_a x < \log_a b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$,

o taip pat ir negriežtas nelygybes $\log_a x \geqslant \log_a b$, $\log_a x \leqslant \log_a b$.





Nelygybių $\log_a x > \log_a b$ ir $\log_a x < \log_a b$ sprendinių aibės yra atitinkami intervalai.

2 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $\log_2 x < 5$.
Visų pirma parašykime skaičių 5 kaip logaritmą pagrindu 2, t. y. $5 = \log_2 2^5 = \log_2 32$. Dabar nelygybę $\log_2 x < 5$ pakeitę ekvivalenčia nelygybe

$$\log_2 x < \log_2 32$$

gauname sprendinių aibę $(0; 32)$.

Šitaip sprendžiame ir kitas nelygybes $\log_a x < b$ ir $\log_a x > b$, kur b yra skaičius: iš pradžių skaičių b užrašome logaritmu pagrindu a. Tai visada galima padaryti.

Panagrinėsime šiek tiek sudėtingesnių logaritminių nelygybių pavyzdžių. Spręsdami šias nelygybes keičiame jas nelygybių sistema, kurios dalį sudaro nelygybės, nusakančios logaritminės nelygybės apibrėžimo sritį.

3 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę:
a) $\log_{\frac{1}{3}}(5-2x) > -2$; b) $\log_4(3x-1) \leqslant \log_4(1-3x)$; c) $\lg(x^2-5x+7) < 0$.

a) Pakeitę -2 reiškiniu $\log_{\frac{1}{3}} 9$ gausime nelygybę:

$$\log_{\frac{1}{3}}(5-2x) > \log_{\frac{1}{3}} 9.$$

Nelygybės apibrėžimo sritį nusako nelygybė $5-2x > 0$; logaritmo pagrindas mažesnis už vienetą. Taigi logaritminę nelygybę galime pakeisti tokia nelygybių sistema:

$$\begin{cases} 5-2x > 0, \\ 5-2x < 9. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą gauname tokius sprendinius: $-2 < x < 2{,}5$.
Taigi nelygybės sprendiniai sudaro intervalą $(-2; 2{,}5)$.

b) Nelygybės $\log_4(3x-1) \leqslant \log_4(1-3x)$ apibrėžimo sričiai nusakyti prireiks dviejų nelygybių. Logaritmo pagrindas didesnis už vienetą, todėl keičiant logaritminę nelygybę racionaliąja nelygybės ženklo nereikės keisti. Logaritminę nelygybę keičiame tokia sistema:

$$\begin{cases} 3x-1 > 0, \\ 1-3x > 0, \\ 3x-1 \leqslant 1-3x; \end{cases} \quad \text{t. y.} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ x < \frac{1}{3}, \\ x \leqslant \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Matome, kad sistema sprendinių neturi, todėl ir logaritminė nelygybė sprendinių neturi.

c) Nelygybę $\lg(x^2-5x+7) < 0$ perrašykime taip: $\lg(x^2-5x+7) < \lg 1$.
Nelygybės apibrėžimo sritį nusako nelygybė $x^2-5x+7 > 0$, logaritmo pagrindas didesnis už vienetą, todėl vietoj logaritminės nelygybės galime spręsti sistemą

$$\begin{cases} x^2-5x+7 > 0, \\ x^2-5x+7 < 1, \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} x^2-5x+7 > 0, \\ x^2-5x+6 < 0. \end{cases}$$

Kadangi lygties $x^2-5x+7=0$ diskriminantas neigiamas, tai ši lygtis sprendinių neturi, o nelygybę $x^2-5x+7 > 0$ tenkina visos x reikšmės. Taigi pakanka spręsti nelygybę $x^2-5x+6 < 0$. Jos sprendinių aibė yra intervalas $(2; 3)$. Šis intervalas yra ir logaritminės nelygybės sprendinių aibė.

4 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $\log_x(x-2) > \log_x 3$.
Kadangi nežinomasis įeina ir į logaritmo pagrindą, tai atskirai reikia nagrinėti atvejus, kai pagrindas yra didesnis už 1 ir mažesnis už 1.
Atveju $x > 1$ nelygybę keičiame sistema

$$\begin{cases} x > 1, \\ x - 2 > 0, \\ x - 2 > 3. \end{cases}$$

Jos sprendinių aibė yra intervalas $(5; +\infty)$. Atveju $0 < x < 1$ vietoj nelygybės sprendžiame sistemą

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x - 2 > 0, \\ x - 2 < 3. \end{cases}$$

Matome, kad ši sistema sprendinių neturi. Taigi nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $(5; +\infty)$.

Pratimai ir uždaviniai

169. Išspręskite nelygybę:

a) $\log_5(3x+7) \geqslant \log_5(2x+4)$;
b) $\log_4(x-2) < \log_4(6-x)$;
c) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-5) \leqslant \log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$;
d) $\log_{0,3}(7-x) > \log_{0,3}(2x+4)$;
e) $\log_{\sqrt{2}}(2x-1) \leqslant \log_{\sqrt{2}}(1+3x)$;
f) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}(3+x) > \log_{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}(2+x)$.

170. Pasirinkite teisingą atsakymą.
a) Nelygybės $\log_{\frac{1}{2}} x > -2$ sprendinių aibė yra:

A $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$ **B** $(4; +\infty)$ **C** $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ **D** $(0; 4)$ **E** $(-\infty; 4)$

b) Nelygybės $\log_{\frac{1}{3}} x < -1$ sprendinių aibė yra:

A $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ **B** $\left(0; \frac{1}{3}\right)$ **C** $(3; +\infty)$ **D** $(-\infty; 3)$ **E** $(0; 3)$

171. Išspręskite nelygybę:

a) $\log_3(3x-3) \leqslant 3$;
b) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) < 2$;
c) $\log_8(4-2x) \geqslant 2$;
d) $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x) < -2$;
e) $\lg(2-3x) \geqslant 0$;
f) $\log_{\frac{1}{10}}(4x-2) > -1$.

172. a) Duota funkcija $f(x) = \log_{0,2}(x-4)$. Raskite a reikšmes, su kuriomis $f(3-a) < f(7)$.
b) Duota funkcija $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$. Raskite b reikšmes, su kuriomis $f(4-b) > f(8)$.

173. Išspręskite nelygybes:

a) $\lg(x+7) < \lg 9$,

$\lg \frac{2x-3}{x+1} > 0$,

$\log_2(2x-1) \leqslant 3$,

$\lg x > 2 + \lg 2$;

b) $\lg(6-2x) \leqslant \lg 8$,

$\log_3 \frac{3x-1}{x-2} > 0$,

$\log_3(2x-4) < 0$,

$\lg(5x-2) < \lg 5 - \lg 2$;

c) $\lg(10x-3) \geqslant \lg 47$,

$\log_{0,2} \frac{x^2-9x+20}{x+11} < 0$,

$\log_2^2 x - 1 \leqslant 0$,

$\lg(15+2x) > \lg 15 + \lg 2$;

d) $\lg(x+1) \geqslant -\lg 2$,

$\log_3(1-2x) < 2$,

$\log_{0,3} \frac{x^2-11x+30}{x+10} \leqslant 0$,

$\lg(x^2-4x+4) < 0$;

e) $\log_x \frac{3}{4} < \log_x \frac{1}{2}$,

$\log_x \frac{5}{6} > \log_x \frac{6}{7}$,

$\log_x(2x+3) > 2$,

$\log_x(3-2x) < 2$;

f) $\log_8(x^2-4x+3) < 1$,

$\log_6(x^2-3x+2) \geqslant 1$,

$\log_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7) < 0$,

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6) \geqslant -3$.

174. Raskite nelygybės $3^{\log_{0,25}(1-x)} \geqslant \frac{1}{3}$ sveikųjų sprendinių sumą.

175. Raskite didžiausią x reikšmę, tenkinančią nelygybę:
$\log_{\frac{1}{2}}(5-x) \leqslant \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.

176. Duota funkcija $f(x) = \log_2 \frac{4-x}{x-1}$.

a) Apskaičiuokite $f(2)$.
b) Raskite funkcijos grafiko ir abscisių ašies susikirtimo taško koordinates.
c) Raskite funkcijos apibrėžimo sritį.
d) Su kuriomis x reikšmėmis $f(x) = 0$?
e) Su kuriomis x reikšmėmis $f(x) > 0$?

177. Duota funkcija $f(x) = \log_3(x^2-6x+8)$.

a) Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritį.
b) Apskaičiuokite $f(1) + f(5)$.
c) Su kokiomis x reikšmėmis $f(x) = 1$?
d) Išspręskite nelygybę $3 \cdot 3^{f(x)} - 9^{f(x)} > 0$.

178. Duota funkcija $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2-7x+10)$.

a) Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritį.
b) Apskaičiuokite $f(1) - f(6)$.
c) Kokiuose taškuose funkcijos $f(x)$ grafikas kerta tiesę $y = -2$?
d) Išspręskite nelygybę $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} - \left(\frac{1}{4}\right)^{f(x)} > 0$.

14. Kartojimo uždaviniai

Funkcijos sąvoka

1. Užpildykite lentelę įrašydami langeliuose nurodytų funkcijų reikšmes:

$x =$	-3	$\frac{1}{4}$	$a-1$	a^2
$f(x) = -x - 7$				
$f(x) = x^2 - 2$				
$f(x) = \frac{x}{\lvert x \rvert} - x$				
$f(x) = x^3 - 2x$				
$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$				
$f(x) = \lvert \sqrt[3]{x^2} - 100x \rvert$				

2. a) Funkcijos $y = ax^2 + bx$ grafikas eina per taškus $(-1; 1)$ ir $(2; 10)$.
1) Raskite koeficientų a ir b reikšmes.
2) Nubraižykite funkcijos grafiką.
3) Įrodykite, kad tiesė $y = -4x - 6$ nekerta šios funkcijos grafiko.

b) Funkcijos $y = ax^2 + bx$ grafikas eina per taškus $(1; -4)$ ir $(-2; -10)$.
1) Raskite koeficientų a ir b reikšmes.
2) Nubraižykite funkcijos grafiką.
3) Įrodykite, kad tiesė $y = 2x + 6$ nekerta šios funkcijos grafiko.

3. Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritį, jei:

a) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$;
b) $f(x) = \frac{x-4}{x^2-16}$;
c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$;
d) $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$;
e) $f(x) = \sqrt{0{,}5x^2 - 2x}$;
f) $f(x) = \sqrt{-0{,}5x^2 + 3x}$;
g) $f(x) = \frac{3x^2+4x-5x^2}{x(2-\sqrt{x+1})}$;
h) $f(x) = \frac{0{,}5x^2-\frac{1}{3}x+5x^3}{x(4-\sqrt{x-1})}$.

4. Su kuriomis kintamojo x reikšmėmis funkcijos:
a) $f(x) = 3x + 8$ reikšmės priklauso intervalui $(-5; 5)$;
b) $f(x) = 2x - 3$ reikšmės priklauso intervalui $[-1; 2]$?

5. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių sritį, jei:

a) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$;
b) $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$;
c) $f(x) = -5x^2 + 8x + 3$;
d) $f(x) = x^2 - x - 6$.

6. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką, jei:

a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kai } x \geqslant 3, \\ -x, & \text{kai } x < 3; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{kai } x \leqslant 2, \\ 5 - x, & \text{kai } x > 2; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ 3 - x^2, & \text{kai } x > 0; \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{kai } x \geqslant 4, \\ \frac{x}{4}, & \text{kai } x < 4. \end{cases}$

7. Duota funkcija $f(x) = \frac{x+4}{x-4}$. Raskite:

a) funkcijos apibrėžimo sritį;
b) funkcijos reikšmes, kai $x = -10; 0; 0{,}6$;
c) x reikšmes, su kuriomis teisingos lygybės $f(x) = 0$, $f(x) = -3$, $f(x) = \frac{2}{5}$.

8. Duota funkcija $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$. Raskite:

a) funkcijos apibrėžimo sritį;
b) funkcijos reikšmes, kai $x = 0{,}25; 16; 20$;
c) x reikšmes, su kuriomis teisingos lygybės $f(x) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x) = \frac{3}{7}$.

9. Apskaičiuokite:
a) $[5{,}8] + [-5{,}8]$; b) $\{5{,}8\} + \{-5{,}8\}$; c) $[-0{,}3] \cdot [1{,}3]$; d) $\frac{\{102{,}2\}}{[102{,}2]}$.

10. Skaičių užrašykite sveikosios ir trupmeninės dalies suma:
a) $32{,}6$; b) $0{,}15$; c) $-8{,}3$; d) $-0{,}34$.

11. Funkcija $f(n) = 5n - n^2$ apibrėžta natūraliųjų skaičių aibėje. Kiek šios funkcijos reikšmių srityje yra teigiamų narių?

12. Nubraižykite funkcijos $y = f(x)$ grafiką, jei:

a) $f(x) = 3x^2$; b) $f(x) = -2x^3$; c) $f(x) = \frac{3}{x+3}$;
d) $f(x) = -\frac{6}{x-4}$; e) $f(x) = |x - 3|$; f) $f(x) = 3|x - 1|$;
g) $f(x) = \frac{|x|}{x}$; h) $f(x) = |x + 1| + |x|$; i) $f(x) = |x| - |x - 2|$.

13. Raskite funkcijai $f(x)$ atvirkštinę funkciją, jei:

a) $f(x) = 3x - 2$; b) $f(x) = 3 - 2x$; c) $f(x) = 4x - 5$;
d) $f(x) = 3x^3$; e) $f(x) = \frac{4x}{x-1}$; f) $f(x) = \frac{x-1}{3x}$.

14. Nustatykite, su kuriomis x reikšmėmis funkcijos $f(x)$ reikšmės lygios nuliui, jei:

a) $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - 5$; b) $f(x) = x^2 + 2x - 48$; c) $f(x) = \frac{7}{x-7}$;
d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$; e) $f(x) = \frac{4}{x+3}$; f) $f(x) = \frac{x^2-25}{x-5}$.

15. Palyginkite funkcijų $f(x) = x^6$ ir $g(x) = x^7$ reikšmes:

a) $f(3{,}5)$ ir $f(-4{,}2)$; b) $g(3{,}5)$ ir $g(-4{,}2)$;

c) $f(-7)$ ir $g(-7)$; d) $g(-4)$ ir $f(-3)$;

e) $f\left(-\frac{15}{16}\right)$ ir $g\left(\frac{16}{15}\right)$; f) $f\left(-1\frac{1}{3}\right)$ ir $g\left(1\frac{7}{15}\right)$.

16. Nustatykite, kurios iš šių funkcijų yra lyginės, kurios nelyginės, kurios nei lyginės, nei nelyginės:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + x^6$; b) $f(x) = x^3 + x - x^5$;

c) $f(x) = x^3 - x + 1$; d) $f(x) = x^2 - 2x + 3$;

e) $f(x) = |x| - x$; f) $f(x) = |x| + x^2$.

17. Nubraižykite funkcijos $g(x)$ grafiką, jeigu žinoma, kad funkcija apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje, yra lyginė, o jos reikšmės, kai $x \geqslant 0$, apskaičiuojamos pagal formulę:
a) $f(x) = 2x + 1$; b) $f(x) = x - x^2$.

18. Nubraižykite funkcijos $h(x)$ grafiką, jeigu žinoma, kad funkcija apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje, yra nelyginė, o jos reikšmės, kai $x \geqslant 0$, apskaičiuojamos pagal formulę:
a) $f(x) = 3 - x$; b) $f(x) = x^2 - 4$.

Laipsninės funkcijos

19. Nubraižykite funkcijos $f(x) = x^6$ grafiką. Pasinaudoję grafiku išspręskite lygtis ir nelygybes:

a) $x^6 = 10$; b) $x^6 = 2$; c) $x^6 = -1$;

d) $x^6 \leqslant 10$; e) $x^6 > 2$; f) $x^6 \geqslant -1$.

20. Nubraižykite funkcijos $f(x) = x^3$ grafiką. Pasinaudoję grafiku išspręskite lygtis ir nelygybes:

a) $x^3 = 3$; b) $x^3 = -5$; c) $x^3 = -0{,}5$;

d) $x^3 > 3$; e) $x^3 \leqslant -5$; f) $x^3 > -1$.

21. a) Nubraižykite funkcijų $f(x) = \frac{x}{5}$ ir $g(x) = \frac{5}{x}$ grafikus. Remdamiesi šiais grafikais raskite lygties $\frac{x}{5} = \frac{5}{x}$ ir nelygybės $\frac{x}{5} \geqslant \frac{5}{x}$ sprendinius.

b) Nubraižykite funkcijų $f(x) = \frac{x}{3}$ ir $g(x) = -\frac{3}{x}$ grafikus. Remdamiesi šiais grafikais raskite lygties $\frac{x}{3} = -\frac{3}{x}$ ir nelygybės $\frac{x}{3} < -\frac{3}{x}$ sprendinius.

22. Raskite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ reikšmių sritis, jei jos apibrėžtos intervale $x \in \left[\frac{1}{3}; 3\frac{1}{3}\right]$ formulėmis:
a) $f(x) = 3x^{-2}$ ir $g(x) = \frac{1}{3}x^{-2}$; b) $f(x) = x^{-4}$ ir $g(x) = x^{-3}$.

23. Reiškiniuose laipsnius su trupmeniniais rodikliais pakeiskite šaknimis:

a) $5^{\frac{1}{5}}$; $4x^{\frac{1}{4}}$; $(4x)^{\frac{1}{4}}$; b) $(xy)^{-\frac{7}{5}}$; $(x+y)^{\frac{7}{5}}$; $\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{4}}$;

c) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{3}}b$; d) $m^{0,4}$; $n^{-0,25}$; $z^{-3,2}$.

24. Šaknį pakeiskite laipsniu su trupmeniniu rodikliu:

a) $\sqrt{34}$; $5\sqrt[5]{a}$; $-\sqrt[4]{\frac{1}{4}a}$; b) $\frac{5}{\sqrt{a+6}}$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}$; $\sqrt[7]{(a+b)^9}$.

25. Į kokią aibę funkcija $f(x)=\sqrt[3]{x}$ atvaizduoja intervalą:

a) $[0; 64]$; b) $[1; 729]$; c) $\left[-\frac{1}{27}; 0\right]$?

26. Į kokią aibę funkcija $f(x)=\sqrt[6]{x}$ atvaizduoja intervalą:

a) $[0; 64]$; b) $\left[\frac{1}{64}; 4096\right]$; c) $[1; 729]$?

27. Užpildykite lentelę:

Funkcija	Apibrėžimo sritis	Reikšmių sritis	Lyginumas	Didėjimo intervalai	Mažėjimo intervalai
$f(x)=x^{-5}$ $f(x)=x^{-\frac{1}{5}}$ $f(x)=x^{\frac{2}{5}}$ $f(x)=x^{\frac{5}{2}}$ $f(x)=-x^{-5}$					

28. Išspręskite lygtį:

a) $x^{\frac{5}{2}}=1$; b) $x^{-\frac{1}{3}}=-1$; c) $x^{\frac{3}{5}}=-27$;

d) $x^{\frac{3}{4}}=125$; e) $x^{2,36}\cdot x^{1,64}=\frac{16}{81}$; f) $x^{4\frac{5}{3}}\cdot x^{-4\frac{7}{6}}=1,44$.

29. Suprastinkite:

a) $\frac{a-1}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}-\frac{1+a^{\frac{1}{2}}}{1-a^{-\frac{1}{2}}}$;

b) $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-b}$;

c) $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\frac{y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{x+y}$;

d) $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}-\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}-\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}\right)$.

30. Išspręskite lygtį:

a) $8 - 4x^{\frac{1}{2}} = 0;$ b) $4x^{\frac{1}{2}} + 4 = 0;$

c) $(x^2 - 2x)\sqrt{x-1} = 0;$ d) $(x^3 - 4x)\sqrt[3]{1-x} = 0;$

e) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+6} = 6;$ f) $(3x-2)^{\frac{1}{2}} \cdot (x+3)^{\frac{1}{2}} = -7.$

31. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} x^{\frac{1}{2}} + 3y^{\frac{1}{2}} = 23, \\ 3x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} = 9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 3, \\ 3y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} = 13; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 15, \\ \frac{x}{y} = 4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} = 6, \\ \frac{x}{y} = 9. \end{cases}$

32. Įrodykite tapatybę:

a) $\sqrt{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[4]{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{2};$ b) $\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{5}-1} = 2.$

Rodiklinės funkcijos

33. a) Duota funkcija $f(x) = 3^{-x^2+x}$. Raskite: $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$.

b) Duota funkcija $f(x) = 0{,}25^{3x-x^2}$. Raskite: $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$.

34. Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritį ir reikšmių sritį, jei:

a) $f(x) = 5^{\frac{1}{x+1}};$ b) $f(x) = \frac{1}{5^{\sqrt{x+1}}};$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{9-x^2}};$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{x}}{x}}.$

35. Nubraižykite funkcijos grafiką ir išvardykite funkcijos savybes:

a) $f(x) = 5^{2x};$ b) $f(x) = -5^{2x};$

c) $f(x) = 5^{|2x|};$ d) $f(x) = 5^{-2x}.$

36. Naudodamiesi funkcijos $f(x) = 3^x$ grafiku apytiksliai atidėkite:

a) Oy ašyje skaičius $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{9}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $3\sqrt{3}$;

b) Ox ašyje x reikšmes, su kuriomis funkcijos $f(x)$ reikšmės lygios $\frac{1}{3}$; 0,5; 1; 1,5; 6.

37. Apskaičiuokite:

a) $3^{10} \cdot 27^{-3} + 25^{-2} \cdot (0{,}2)^{-4} + \left(8^{-\frac{2}{9}}\right)^{-3};$

b) $\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot 16^{-1{,}5} + 625^{-4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-17};$

c) $\left(8 - 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0\right)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2};$

d) $\left(9 - 7 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^0\right)^{-3} + \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}.$

38. Įrodykite, kad:

a) $8^2 - 8^3 - 8$ dalijasi iš 19;
b) $2^7 - 2^5 - 2^4$ dalijasi iš 5;
c) $5^{n+3} - 2^{n+3} + 5^n - 2^n$ dalijasi iš 9, kai n bet kuris natūralusis skaičius;
d) $10^{n+2} - 4^n - 10^n + 4^{n+2}$ dalijasi iš 10, kai n bet kuris natūralusis skaičius.

39. Remdamiesi grafikais raskite lygties sprendinius:

a) $3^x = -x + 4$;
b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -3 - 2x$;
c) $1{,}5^x = -2x + 1$;
d) $5^x = 3^x + 2$.

40. Išspręskite lygtis:

a) $6^{x-4} = \frac{1}{216}$,
$12^{2x-1} = 1$,
$\left(\frac{1}{32}\right)^{2x} = 4$,
$0{,}4^x = 15\frac{5}{8}$;

b) $0{,}3^x = 11\frac{1}{9}$,
$56^{x-4} = 1$,
$\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^x = 128$,
$3^{1-2x} = \frac{1}{243}$;

c) $8^{2x-6} = \frac{1}{512}$,
$1000^x = 10\sqrt{10}$,
$5^{x^2-17x+62{,}5} = 25\sqrt{5}$,
$2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot 10^{5x-5}$;

d) $3{,}5^x = 42\frac{7}{8}$,
$0{,}25^x = \frac{1}{8}$,
$0{,}5^{6x-x^2+2{,}5} = 16\sqrt{2}$,
$10^{3x+2} = 5^{5x-3} \cdot 0{,}5^{3-5x}$.

41. Kuriame taške kertasi funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikai, jei:

a) $f(x) = 5^x$, $g(x) = 5^{x-1} + 4$;
b) $f(x) = 2^{x+2} - 96$, $g(x) = 2^x$;
c) $f(x) = 7^{x+1} - 8$, $g(x) = 7^{x-1} + 40$;
d) $f(x) = 3 \cdot 5^{x-2}$, $g(x) = 140 - 5^x$?

42. Išspręskite rodiklinę lygtį pakeisdami nežinomąjį:

a) $3^{2x} - 3^x - 702 = 0$;
b) $2^{2x} + 2^{x+1} - 80 = 0$;
c) $2^{2x-3} - 3 \cdot 2^{x-2} = -1$;
d) $3^{x+2} - 3^{2x+5} = -2$;
e) $3^{4x} - 10 \cdot 3^{2x} + 9 = 0$;
f) $2^{4x} - 5 \cdot 2^{2x} + 4 = 0$.

43. Raskite lygties sprendinių sumą:

a) $5^{x+1} + 5^{3-x} = 130$;
b) $0{,}2^{x^2-16x+37{,}5} = 5\sqrt{5}$;
c) $12 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} - 3^{\frac{1}{x}} - 27 = 0$;
d) $3 \cdot 81^{\frac{1}{x}} - 10 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 3 = 0$.

44. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} 5^{x-1} \cdot 5^{y-1} = 125, \\ 5^{x-1} + 5^{y-1} = 30; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^{y+2} = 8, \\ 2^x - 9 \cdot 3^y = 7. \end{cases}$

45. Kokiems $a > 0$ teisinga ši nelygybė:

a) $a^3 > a^4$; b) $a^{\frac{2}{5}} > a^{\frac{2}{3}}$;

c) $a^{-3} > a^{-2}$; d) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$?

46. Nustatykite, su kuriomis x reikšmėmis reiškinių:

a) 25^{2x-3}; $4^{\frac{x-3}{x^2-4x-5}}$; $(\sqrt{3}-1)^{1-3x}$ reikšmės didesnės už vienetą;

b) 53^{5x-6}; $5^{\frac{x^2-3x+2}{x+2}}$; $(\sqrt{5}-2)^{4-5x}$ reikšmės mažesnės už vienetą.

47. Išspręskite nelygybes:

a) $0{,}4^x < 0{,}064$,

$49^x > 7\sqrt[3]{7}$,

$2^{\frac{3}{x-1}} < 0{,}125$,

$\left(\frac{5}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^x > 2 \cdot 9^{-\frac{1}{2}}$;

b) $0{,}3^x > 0{,}0081$,

$5^{\frac{1}{2x-1}} > \sqrt{0{,}2}$,

$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{x^2-7x+4} < 4{,}5$,

$\frac{5^{3x} \cdot 0{,}04}{5^{\frac{1}{2}}} < 0{,}2^{-x}$;

c) $4^x > 32$,

$\left(\frac{5}{7}\right)^x < \frac{49}{25}$,

$0{,}5^x > 2\sqrt{2}$,

$2^{x+1} - 2^{x+3} > -48$;

d) $100^x > 0{,}1\sqrt{1000}$,

$2^{\frac{1}{x}} < \sqrt{0{,}5}$,

$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2-6x+3} < 0{,}8$,

$7^{1-x} - 7^{-x} < \frac{6}{7}$.

Logaritmai ir logaritminės funkcijos

48. Apskaičiuokite remdamiesi pagrindine logaritmų tapatybe:

a) $5^{\log_5 1}$, $5^{\log_{25} 2}$, $49^{\log_7 3}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 6}$;

b) $2^{-\log_4 3}$, $3^{2-3\log_3 3}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{3+\log_5 0{,}25}$, $6^{\frac{1}{4}\log_{36} 16+2}$;

c) $10^{\lg 9}$, $10^{1-2\lg\sqrt{5}}$, $100^{\lg 0{,}2}$;

d) $0{,}01^{-\lg 0{,}2}$, $1000^{-\lg 3}$, $0{,}01^{\lg 2-1}$.

49. Raskite reiškinių reikšmes:

$\log_9 \sqrt{3}$; $\log_2 \frac{1}{16}$; $\log_8 16$; $\log_{25} \frac{1}{5}$;

$\log_{0{,}25} 1$; $\log_{0{,}8} \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{64}{27}$; $\log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{16}$.

50. Kuris iš skaičių yra mažiausias:

a) $\log_3 \sqrt{2}$, $\log_5 \sqrt{5}$, $\log_{\frac{1}{2}} 5$; b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{7}$, $\log_{\sqrt{2}} 3$, $\log_3 \frac{1}{2}$?

51. Apskaičiuokite:

a) $\log_3 \frac{27}{8}$, kai $\log_3 2 = a$; b) $\log_2 \frac{8}{9}$, kai $\log_2 3 = a$.

52. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę:

a) $\log_3 \frac{1}{3} + \log_3 \frac{1}{9} + \log_3 \frac{1}{27}$; b) $\log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{4} + \log_2 \frac{1}{8}$;

c) $\left(\log_3 \frac{1}{81} + \log_3 81\right) \cdot \log_{81} 3$; d) $\left(\log_{\sqrt{2}} 2 + \log_2 \sqrt{2}\right)^2$;

e) $2002 \log_{2002} 2002 + \log_{2002}^{2002} 2002$; f) $\log_3 10 \cdot \lg 27$.

53. Kuris skaičius didesnis:

a) $\lg 42 - \lg 3{,}5$ ar $3 \lg 2$; b) $\lg 3 + 3 \lg 2$ ar $2 \lg 5$;

c) $1 + 2 \lg 2 + \lg 3$ ar $2 \lg 11$; d) $\frac{1}{2} + \lg 3$ ar $\lg 19 - \lg 2$?

54. Išreikškite kintamąjį y kintamuoju x:

a) $x = 7^{y+2}$; b) $x = 10 \cdot 3^y$; c) $x = \left(\frac{1}{5}\right)^{3-y}$; d) $x = \frac{\sqrt{5}}{5^{y+5}}$.

55. Pakeiskite logaritmų suma arba skirtumu:

a) $\log_9(81x)$; b) $\log_{81}\left(\frac{9}{x}\right)$; c) $\log_{0,3} \frac{0{,}027}{x^3}$; d) $\lg\left(\sqrt{1000} \cdot x^2\right)$.

56. Nustatykite, su kuriomis x reikšmėmis turi prasmę reiškinys:

a) $\log_6(2x - 6)$; b) $\lg \frac{x-2}{3}$; c) $\log_{\frac{1}{2}}(1 - x^2)$;

d) $\lg(x^2 - 9)$; e) $\log_5 \frac{5-x}{2x+3}$; f) $\log_{0,1} \frac{2x+9}{x-2}$.

57. Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritį, jei:

a) $f(x) = \log_3\left((4x + 1)(4x - 1)\right)$; b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{2x-3}{x^2}$;

c) $f(x) = \lg\left(1 - \frac{1}{x}\right)$; d) $f(x) = \lg\left(\frac{3}{x-2} - 1\right)$;

e) $f(x) = \frac{\lg(5-x)}{x-2} - \sqrt{x+1}$; f) $f(x) = \frac{\sqrt{6-x}}{x-1} + \lg(x + 3)$.

58. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką ir išvardykite funkcijos savybes, jei:
a) $f(x) = \log_5(x - 1)$; b) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(x + 1)$.

59. Remdamiesi grafikais raskite tikslius ar apytikslius lygties sprendinius:

a) $\log_3 x = x - 7$; b) $\lg(x + 10) = 1 - 2x$;

c) $\log_3(x - 3) = x + 3$; d) $\lg x = x - 10$.

60. Nustatykite, su kokiomis x reikšmėmis teisinga nelygybė:

a) $\log_x 15 < \log_x 17$; b) $\log_x 17 > \log_x 19$;

c) $\log_5 x > 1$; d) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant 0$.

61. a) Raskite reiškinio logaritmą pagrindu 3:
$9x^2$; $\frac{1}{27}a^3m$; $81y^{\frac{1}{3}}x^2a$; $\sqrt[4]{\frac{1}{3}a} \cdot b^{\frac{1}{3}}$.
b) Raskite reiškinio logaritmą pagrindu 10:
$10a^2y^3$; $\frac{1}{100}x\sqrt[5]{y}$; $\sqrt{10}a^3y^2$; $\frac{x^5y^{10}}{\sqrt{0,1}}$.

62. Nustatykite, su kuriomis x reikšmėmis funkcija $f(x)$ įgyja reikšmes -1; 0; 1, jei:

a) $f(x) = \lg(2-5x)$; b) $f(x) = \log_3(x^2-13)$;

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{x+1}$; d) $f(x) = \lg \frac{x+5}{x}$.

63. Raskite x:

a) $\log_6 x = -2$; b) $\log_{16} x = \frac{3}{4}$; c) $\log_{27} x = -\frac{1}{3}$;

d) $\log_8 x = -2$; e) $\log_{\frac{2}{3}} x = -4$; f) $\log_{0,2} x = -3$.

64. Išspręskite lygtį:
a) $\lg(x^2-5x+7) = 0$;
b) $\log_3(x^2-5x+15) = 0$;
c) $\lg(x+6) - \frac{1}{2}\lg(2x-3) = 2 - \lg 25$;
d) $0,5\lg(x-5) - \lg\sqrt{x-2} = \lg 50 - 2$;
e) $\lg\sqrt{x-1} + \lg\sqrt{2x+6} = \lg(x+3)$;
f) $\frac{\lg(5x-4)}{2\lg x} = 1$;
g) $\log_9(3^x+8) + \log_9(10-3^x) = 2$;
h) $9^{\lg x} + 3^{1-2\lg x} = 4$.

65. Raskite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikų susikirtimo taškų koordinates, jei:
a) $f(x) = 9^{\log_3 x}$ ir $g(x) = 4 \cdot 3^{\log_3 x} - 3$;
b) $f(x) = \log_4 \sqrt{x}$ ir $g(x) = 1 + \log_2 \sqrt{x}$.

66. Raskite tašką, kuriame funkcijos grafikas kerta abscisių ašį:
a) $y = x\lg 2 + \lg(2+2^x) - \lg 80$; b) $y = \log_3 \sqrt{x^2} - \sqrt{2\log_3(-x)}$.

67. Išspręskite lygtį:

a) $\log_x(2x^2-3x+2) = 2$; b) $\log_x(2x^2-1) = 2$;

c) $\log_x(2x^2-x) = 2$; d) $\log_x(2x^2-2x-3) = 2$.

68. Išspręskite lygtį taikydami formulę $\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$:

a) $\log_{81} x + \log_3 x = 2\frac{1}{2}$; b) $\log_2 x + \log_{64} x = 3\frac{1}{2}$;

c) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5\frac{1}{2}$; d) $\log_{81} x + \log_{27} x - \log_3 x = -\frac{5}{6}$.

69. Išreikškite lygties sprendinį dešimtainiu logaritmu:

a) $10^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$; b) $3{,}5^x = 6$; c) $4^{2,5x} = 7$; d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x} = 3$.

70. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 5, \\ \lg x + \lg y = 7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lg x - \lg y = \lg 1{,}6, \\ x + 0{,}4y = 20; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5, \\ 10^{\lg(x+y)} = 5; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 1 + \lg 9, \\ 10^{x+y} = 10^{19}; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 + \log_2 3, \\ \lg(x^2 + y^2) = 2; \end{cases}$ f) $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2 - \lg 5, \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 1 + \lg 1{,}2. \end{cases}$

71. Nustatykite, su kuriomis x reikšmėmis funkcijos $f(x)$ reikšmė lygi 2, jei:

a) $f(x) = \log_{x+1} 9 + \log_{x+1} 4$; b) $f(x) = \log_x (2x^2 + x - 12)$;

c) $f(x) = \log_{x+1}(2x^2 + 4x - 14)$; d) $f(x) = \log_{x-2}(2x^2 - 11x + 16)$.

72. Išspręskite nelygybę:

a) $\log_6(x-3) > 0$; b) $\log_{\frac{1}{4}}(x+5) < 2$;

c) $\log_5(x+13) < 2$; d) $\log_{\frac{1}{27}}(x-3) > -\frac{1}{3}$;

e) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{x-2}{x+2} < \frac{1}{3}$; f) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{2x-1}{x+3} < 0{,}5$;

g) $\log_x \frac{5}{4} < \log_x \frac{1}{2}$; h) $\log_x \frac{5}{6} > \log_x \frac{8}{9}$;

i) $\log_x(x+2) > 2$; j) $\log_x(x-2) < 2$.

73. Raskite nelygybės sveikuosius sprendinius:

a) $\log_{0,1} 4 + \log_{0,1} 3 < \log_{0,1}(3x+6)$; b) $\log_{1,1}(7x-42) < \log_{1,1} 4 + \log_{1,1} 7$.

74. Nustatykite, su kuriomis x reikšmėmis funkcijos $f(x)$ reikšmės yra neigiamos:

a) $f(x) = \log_3 \frac{x^2-6x+5}{x-7}$; b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2-4x+3}{3x-7}$;

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} \frac{x-2}{x+3} - \frac{1}{3}$; d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} \frac{2x-1}{x+1} - \frac{1}{2}$.

75. Nebraižydami funkcijos $f(x)$ grafiko nustatykite, su kuriomis x reikšmėmis grafiko taškai yra virš tiesės $y = 2$, jei:

a) $f(x) = \log_3(13 - 4^x)$; b) $f(x) = \log_5(26 - 3^x)$.

76. Ar turi prasmę reiškinys:
a) $\lg(\lg 0{,}642)$; b) $\sqrt{\lg(\lg 88{,}3)}$; c) $\lg(\lg 1{,}5)$; d) $\sqrt{\lg(\lg 103{,}5)}$?
Atsakymą pagrįskite.

77. Raskite duotajai funkcijai atvirkštinę funkciją:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; b) $f(x) = \log_2 x$;

c) $f(x) = \log_2(x+1)$; d) $f(x) = 2^{x-1}$.

78. Raskite funkcijos $f(x) = \sqrt{\lg \frac{3-x}{x}}$ apibrėžimo sritį.

Geometrijos uždaviniai

79. Lygiašonio trikampio ABC $(AB = BC)$ pusiaukraštinė, nubrėžta iš viršūnės A, lygi 36 cm ir su trikampio pagrindu AC sudaro 30° kampą. Raskite trikampio ABC aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės B, ilgį.

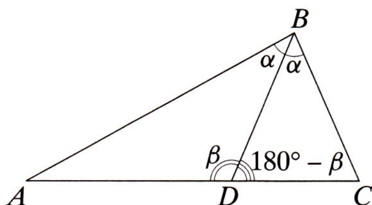
80. Raskite kampą tarp spindulio OA ir teigiamosios pusašės Ox, jei taško A koordinatės yra:
a) $(2; 2\sqrt{3})$; b) $(-\sqrt{3}; 1)$.

81. Suprastinkite reiškinį $2\sin 135^\circ + 4\cos 150^\circ - 3\,\mathrm{tg}\,120^\circ$.

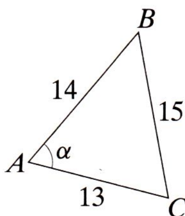
82. Trikampio ABC plotas lygus $36\,\mathrm{cm}^2$, $AB = 12\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $\angle A = 60^\circ$. Raskite kraštinės AC ilgį.

83. Įrodykite, kad lygiagretainio plotas lygus dviejų gretimų jo kraštinių ilgių ir sinuso kampo tarp jų sandaugai.

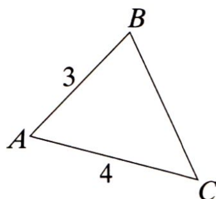
84. Taikydami sinusų teoremą įrodykite, kad trikampio pusiaukampinė dalija prieš tą kampą esančią kraštinę į atkarpas, proporcingas prie jų esančioms kraštinėms, t. y. $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$.



85. Pagal brėžinio duomenis raskite $\sin\alpha$.



86. Pagal brėžinio duomenis raskite $\sin B$, kai $\sin C = \frac{1}{2}$.



87. Naudodamiesi formulėmis $S_\triangle = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ ir $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ įrodykite, kad $S_\triangle = \frac{abc}{4R}$; čia R — apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulys.

88. Smailų kampą sudarančios trikampio kraštinės lygios 5 cm ir 8 cm. Apskaičiuokite jo trečiąją kraštinę, jeigu trikampio plotas lygus 12 cm^2.

Nurodymas. Taikykite trigonometrinę trikampio ploto formulę ir kosinusų teoremą.

---

89. Raskite kampų sumą:

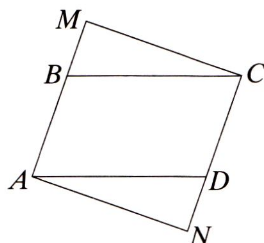
a) iškilojo septynkampio; b) iškilojo devynkampio.

90. Kiek kraštinių turi iškilasis daugiakampis, kurio kiekvienas kampas lygus:
a) 150°; b) 156°?

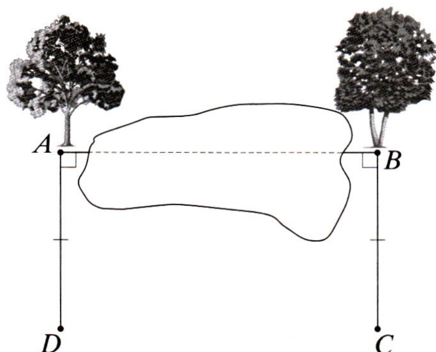
91. Lygiagretainio smailiojo kampo pusiaukampinė lygiagretainio kraštinę dalija į 9 cm ir 16 cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą.

92. Lygiagretainio bukojo kampo pusiaukampinė dalija lygiagretainio kraštinę pusiau. Raskite lygiagretainio kraštinių ilgius, jei jo perimetras lygus 90 cm.

93. Duota: $ABCD$ — lygiagretainis, $BM = DN$.
Įrodyti: $AMCN$ — lygiagretainis.



94. Norint rasti atstumą AB, kurio išmatuoti negalima, vietovėje galima nužymėti stačius kampus BAD ir ABC ir atidėti kampų kraštinėse lygias atkarpas AD ir BC. Paaiškinkite, kaip surasti atstumą AB.



95. Įrodykite, kad lygiagretainio vidaus kampų pusiaukampinės susikirsdamos sudaro stačiakampį.

96. Įrodykite, kad bet kurio keturkampio kraštinių vidurio taškai yra lygiagretainio viršūnės.

97. $ABCD$ yra stačiakampis, $\angle CAD = 30^\circ$, $AC = 12\,\text{cm}$. Apskaičiuokite stačiakampio perimetrą ir plotą.

98. Vienas rombo kampas lygus 120°. Trumpesnioji rombo įstrižainė lygi 20 cm. Apskaičiuokite:

a) rombo perimetrą; b) ilgesniąją rombo įstrižainę.

99. Aukštinė, nubrėžta iš rombo bukojo kampo viršūnės, dalija rombo kraštinę pusiau. Apskaičiuokite rombo perimetrą, jei trumpesnioji jo įstrižainė lygi 2 dm.

100. Aukštinės, nubrėžtos iš vienos rombo viršūnės, sudaro 60° kampą. Raskite:

a) rombo kampus;

b) rombo plotą, jei jo aukštinė lygi $2\sqrt{3}$ dm.

101. Kvadrato įstrižainė lygi 10 cm. Jo kraštinė yra kito kvadrato įstrižainė. Apskaičiuokite antrojo kvadrato kraštinės ilgį.

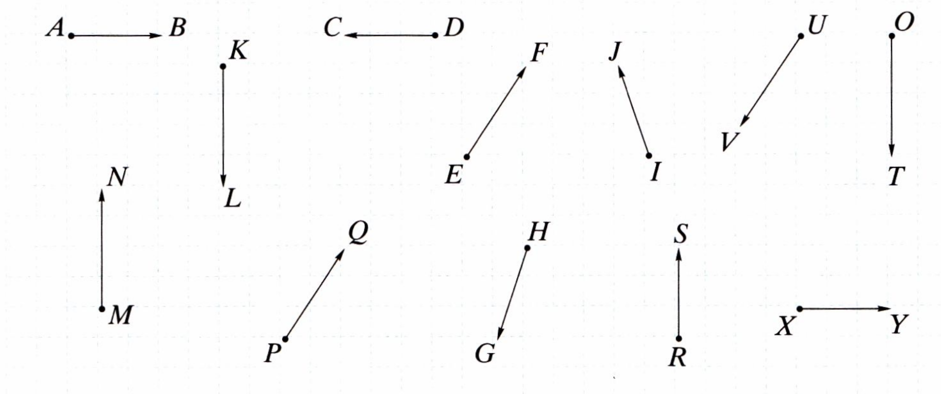
102. Plokštumoje duoti trys taškai A, B ir C nesantys vienoje tiesėje. Kiek skirtingų vektorių apibrėžia šie taškai?

103. Tiesėje yra trys taškai M, N, K. Taškas K yra tarp taškų M ir N. Imdami šiuos taškus vektorių pradžios ir galo taškais surašykite:

a) vienakrypčių vektorių poras; b) priešpriešių vektorių poras.

104. Nurodykite vektorius, kolinearius vektoriui:

a) $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{MN}$; c) $\overrightarrow{EF}$.



Kurie brėžinyje pavaizduoti vektoriai yra lygūs?

105. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinės ilgis $4\sqrt{3}$ cm. Trikampio pusiaukraštinės AM ir CN susikerta taške O. Raskite vektorių $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{NM}$ ilgius.

106. Stačiakampio $ABCD$ kraštinė $AB = 4$ cm, kraštinė $BC = 6$ cm. Taškas E — kraštinės BC vidurys. Raskite vektorių $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{AC}$ ilgius.

107. Vektorius $\vec{a}$ priešpriešis vektoriui $\vec{c}$, o vektorius $\vec{c}$ priešpriešis vektoriui $\vec{b}$. Ką galima pasakyti apie vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kryptis?

108. Kokios rūšies bus iškilasis keturkampis $KLMN$, kai:

a) $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$;

b) vektoriai $\overrightarrow{LM}$ ir $\overrightarrow{KN}$ — kolinearūs, o vektoriai $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{NM}$ — nekolinearūs?

109. $ABCD$ — lygiagretainis. Raskite sumą šių vektorių:

a) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{DC}$.

110. Nubraižykite trikampį ABC ir jo pusiaukraštinę BD. Vektorių $\overrightarrow{BD}$ išreikškite vektoriais:

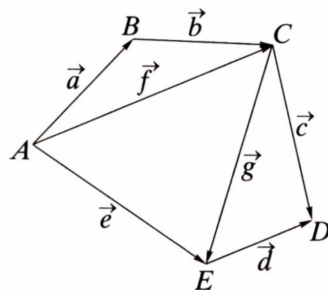
a) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{CA}$; c) $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{BC}$.

111. Iš pateikto brėžinio parašykite, kam lygus vektorius:

$\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{f}+\vec{g}$; $\vec{f}-\vec{a}$;

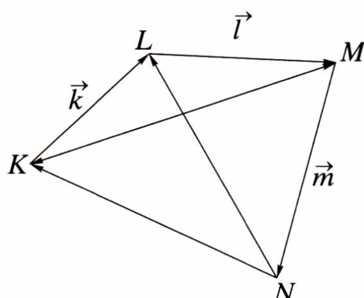
$\vec{c}-\vec{g}$; $\vec{e}+\vec{d}$; $\vec{e}-\vec{f}$;

$\vec{f}+\vec{g}+\vec{d}$; $\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}$.



112. Duoti vektoriai: $\overrightarrow{KL} = \vec{k}$, $\overrightarrow{LM} = \vec{l}$, $\overrightarrow{MN} = \vec{m}$. Išreikškite duotaisiais vektoriais šiuos vektorius:

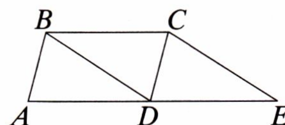
a) $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{MK}$; b) $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{KN}$; c) $\overrightarrow{LN}$, $\overrightarrow{NL}$.



113. Suprastinkite reiškinį:

a) $(\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{XZ}) + (\overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZY})$; b) $(\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{YZ}) - (\overrightarrow{ZT} + \overrightarrow{XT}) + (\overrightarrow{ZY} - \overrightarrow{ZT})$.

114. $ABCD$ ir $BCED$ yra lygiagretainiai. Įrodykite:



a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE}$;

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BC}$.

115. Taisyklingojo šešiakampio $ABCDEF$ vektorius $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AE}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

116. Taškai M ir N yra atitinkamai atkarpų AB ir CD vidurio taškai. Įrodykite, kad $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

117. Duotas tetraedras $ABCD$. Raskite:

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$; b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$;

c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$; d) $(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{DB}$.

118. Pasirinkę nekolinearius vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nubrėžkite vektorių:

a) $3\vec{a}$; b) $\vec{a} + 2\vec{b}$; c) $2\vec{a} - \vec{b}$; d) $-1{,}5\vec{a} - 0{,}5\vec{b}$.

119. Išspręskite lygtį, kai $\vec{x}$ — nežinomas vektorius:

a) $2\vec{x} + \vec{a} = 3\vec{a}$; b) $\vec{x} + \vec{a} - \vec{b} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

120. Suprastinkite reiškinį:

a) $2(\vec{a} + \vec{b}) - 3(\vec{a} - \vec{b})$; b) $(\vec{x} + \vec{y}) + (\vec{x} + \vec{y}) - 2\vec{y}$.

121. $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$. Įrodykite, kad $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Įvairūs uždaviniai

122. Kurie iš teiginių apie skaičių $a = \sqrt[3]{3^2 \cdot \sqrt{3}}$ yra teisingi:
A a yra mažesnis už 3;
B a yra racionalus;
C a yra lygus $\sqrt[4]{3^3\sqrt{3}}$?

123. Bankas moka $p\%$ metinių sudėtinių palūkanų. Apskaičiuokite, kiek pinigų bus banko sąskaitoje po n metų, jei pradinio indėlio dydis a litų.

124. Bankas moka metines sudėtines palūkanas. Apskaičiuokite, kiek procentų metinių palūkanų moka bankas, jei žinoma, kad per 20 metų indėlis padvigubėja. (Atsakymą pateikite dešimtosios tikslumu.)

125. Krovinių siunta vežama dviem skirtingais automobiliais. Kad būtų pervežtas visas krovinys, abu automobiliai turi padaryti po 5 reisus. Jeigu krovinį vežtų tik pirmasis automobilis, 75% viso krovinio jis pervežtų padaręs 15 reisų. Kiek kartų didesnį (o gal mažesnį) krovinį vienu reisu perveža pirmasis automobilis negu antrasis?

126. Kiek procentų kasmet reikia padidinti darbo našumą, kad per 7 metus jis padidėtų dvigubai? trigubai? (Atsakymą pateikti šimtųjų tikslumu.)

127. Kokius skaitmenis reikia parašyti vietoj x ir y, kad skaičius $\overline{23xy}$ dalytųsi iš 45?

128. Dviženklis skaičius yra 6 kartus didesnis už savo skaitmenų sumą. Kiek kartų už savo skaitmenų sumą bus didesnis skaičius, gautas sukeitus skaitmenis vietomis?

129. Racionalųjį skaičių išreikškite begaline periodine dešimtaine trupmena:

a) $\frac{1}{7}$; b) $\frac{9}{11}$; c) $\frac{4}{13}$; d) $\frac{5}{12}$.

130. Begalinę periodinę dešimtainę trupmeną užrašykite paprastąja:

a) $0,(13)$; b) $-1,(21)$; c) $1,2(3)$; d) $-3,2(13)$.

131. Kuris iš dviejų skaičių didesnis:

a) $\frac{5}{13}$ ar $0,384615$; b) $0,(172)$ ar $0,172$;
c) $\sqrt{2}+\sqrt{11}$ ar $\sqrt{3}+3$; d) $-\sqrt{5}-\sqrt{2}$ ar $-\sqrt{15}-2$?

132. Įrodykite, kad užrašyto reiškinio reikšmė — racionalusis skaičius:

a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$.

133. Suprastinkite reiškinį:

a) $(\sqrt{14}-2\sqrt{35})\cdot\frac{\sqrt{7}}{7}+\sqrt{20}$;

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{13}-\frac{1}{2}\sqrt{26}\right):\frac{1}{6}\sqrt{13}+\sqrt{18}$;

c) $\frac{5+2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}+\frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}$;

d) $\left(\frac{x}{9-x^2}+\frac{4(x+3)}{x^2-3x}\right)\cdot\frac{x+3}{x+6}-\frac{5}{x-3}$;

e) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{x+\sqrt{xy}+y}$;

f) $\frac{y-1}{\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{y}}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{y}}{y-1}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}-1}\right)$;

g) $\frac{a^2}{a-2}\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{4(a-1)}{a^3}}$, kai $0<a<2$;

h) $\frac{1}{m+1}\sqrt{\frac{m+2}{m}+\frac{1}{m^2}}$, kai $-1<m<0$.

134. Apskaičiuokite:

a) $\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$, kai $a=2{,}3\cdot10^{17}$, $x=3$;

b) $\frac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}{a-1}$, kai $a=5$;

c) $\frac{a-x}{x-b}$, kai $x=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4(a+b)}$;

d) $\frac{x}{x+y+z}$, kai $x+y+z=3y=2z$.

135. Įrodykite, tokį teiginį. Kai $a^2>b$, tai teisingos lygybės:

a) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$;

b) $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

136. Įrodykite, kad reiškinių

$\frac{x^2-1}{(x-1)x+1}$ ir $\frac{1-2x}{x(1-x)-1}$

suma lygi jų kubų sumai.

137. Įrodykite nelygybę $a^2+b^2+1\geqslant ab+a+b$.

138. Du darbininkai dirbdami kartu gali padaryti darbą per 20 dienų. Vienas iš jų dirbdamas atskirai tam darbui atlikti sugaišta 30 dienų mažiau negu kitas. Per kiek dienų visą darbą atliktų kiekvienas darbininkas dirbdamas atskirai?

139. Atstumas tarp dviejų miestų 600 km. Pašto traukinys šį atstumą nuvažiuoja 8 valandomis greičiau už prekinį. Jei kiekvieno traukinio vidutinis greitis būtų 10 km/h didesnis, tai pašto traukinys šį kelią nuvažiuotų 5 valandomis greičiau už prekinį. Koks kiekvieno traukinio vidutinis greitis?

140. Brangakmenio kaina proporcinga jo masės kvadratui. p karatų brangakmenis (1 karatas = 0,2 g) padalytas į dvi dalis. Po šio padalijimo jo kaina sumažėjo k kartų. Raskite abiejų dalių mases.

141. Išspręskite lygtį:

a) $x^2 + 3x = 1 - 2|x - 1|$;

b) $x|x| + |2x^2 - 5x| = 6$;

c) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$;

d) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$;

e) $\frac{x^2}{2} + \frac{2}{x^2} = 5 \cdot \frac{2-x^2}{2x}$ (naudokitės keitiniu $y = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$);

f) $x^3 - 3x - 2 = 0$;

g) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2} = 9$;

h) $\sqrt{2x-15} - \sqrt{x+16} = -1$;

i) $\sqrt{x+1} + 2 = \sqrt{x}$;

j) $\sqrt{x^2 - |x+2|} = 2x - |x+1|$;

k) $\sqrt[3]{x^3 + 7} = x + 1$.

142. Išspręskite nelygybę:

a) $\frac{(x-1)^5(x+2)^2}{x} \leqslant 0$;

b) $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} < 1$;

c) $x^2 - 3|x| + 2 > 0$;

d) $\frac{x^2-1}{x^2+x+1} < 1$;

e) $\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} < 2$;

f) $\frac{2(x-3)}{x(x-6)} \leqslant \frac{1}{x-1}$.

143. Su kuriomis sveikosiomis a reikšmėmis nelygybė
$\frac{x^3-x^2}{a^2x^2+x+2} \leqslant \frac{x^2-3}{a^2x+a-1}$
teisinga, kai $x = 2$?

144. Su kuriomis sveikosiomis a reikšmėmis nelygybė
$\frac{2x^3-1}{ax+2x^4} < \frac{x}{ax^5+5}$
teisinga, kai $x = 1$?

145. Traukinys važiuoja pastoviu greičiu iš vieno miesto į kitą, tarpinėje stotelėje stovi 16 minučių ir po to padidina greitį 10 km/h. Atstumas nuo tarpinės stotelės iki galinio punkto 80 km. Koks turi būti traukinio greitis iki tarpinės stotelės, kad jis nepavėluotų atvykti į galinį punktą?

146. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} 5(x-y) = 4y, \\ x^2 + 4y^2 = 181; \end{cases}$
b) $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$
c) $\begin{cases} xy(x+y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$

Kartojimo uždavinių atsakymai

5 skyrius (76–84 psl.)

1. a) 2; b) 1; c) -1; d) 3; e) 0.

2. a) 0,3125; b) 0,144; c) 3,(8); d) 2,(27); e) 0,(307692); f) 0,(230769); g) 0,2(56); h) 1,0(1); i) 0,(2352941176470588).

3. a) $\frac{61}{9}$; b) $-\frac{271}{99}$; c) $\frac{89}{90}$; d) $\frac{141}{275}$; e) $\frac{6511}{9000}$. **4.** 201; 256. **5.** 243.

6. a) 2; b) -5; c) 5; d) 1; e) $\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$. **8.** a) a; b) b; c) b; d) a.

9. a) 0,820; b) 2,828; c) 0,026; d) $-4{,}216$.

11. a) 1200; b) 12; c) $14\sqrt[4]{75}$; d) $\sqrt[12]{\frac{3}{4}}$; e) 0,6; f) $1\frac{8}{9}$; g) $30\frac{3}{8}$; h) $\frac{1}{12}$.

12. a) 1; b) -1; c) 1; d) 0; e) 3; f) -2. **13.** $d < a < c < b$. **14.** $\approx 3{,}1 \cdot 10^{13}$ km.

15. a) $\frac{x-y+z}{x+y-z}$; b) $a-1$; c) $x^3(x+y)$; d) $\frac{a+2}{a+6}$; e) $\frac{3}{x+y}$; f) $\frac{1}{3}(m-5)^2$; g) $1+\sqrt{\frac{y}{x}}$; h) $\frac{a+2}{2b-3}$.

16. a) $\frac{2(2-a)}{a(2+a)}$, $-6\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{x(3-x)}$, $\frac{8}{9}$; c) $1+\frac{5}{x}$, -19; d) $ab+\frac{1}{2a-b}$, $1\frac{8}{15}$.

17. a) $24\sqrt{10}$; b) $56\sqrt{15}$; c) $2\sqrt{2}$; d) $2\sqrt{5}$.

18. *Nurodymas*. Įrodoma naudojantis greitosios daugybos formulėmis.

19. a) $-\frac{1}{5}$, kai $x \in (-\infty; 0)$; $\frac{9}{5}$, kai $x \in (0; +\infty)$;
b) -1, kai $x \in (-\infty; -3)$; $\frac{1}{3}$, kai $x \in (-3; +\infty)$;
c) $\frac{4}{x}$, kai $x \in (-\infty; -2]$; -2, kai $x \in (-2; 0) \cup (0; 2]$; $-\frac{4}{x}$, kai $x \in (2; +\infty)$;
d) -6, kai $a \in (-\infty; -4)$; 6, kai $a \in (-4; -3) \cup (-3; +\infty)$;
e) $-x(x+1)$, kai $x \in (-\infty; 1)$; x^2+x+2, kai $x \in (1; +\infty)$;
f) $-\frac{a}{2}$, kai $a \in (-\infty; -2)$; $\frac{a(a-1)}{2}$, kai $a \in (-2; +\infty)$.

20. a) $\frac{2}{11}$; b) 2,5; c) -4; d) -1; $\frac{5}{6}$; e) -1; $-0{,}5$; f) $-0{,}2$; 2; g) -1; h) -1; 5; i) 3; 4; j) -6; 2.

21. a) $m \in (-2; +\infty)$; b) $m = -2$; c) $m \in (-\infty; -2)$.

22. a) Ne; b) taip; c) ne; d) taip. **23.** 3; 4. **25.** a) Ne; b) ne; c) ne; d) taip; e) taip.

26. a) 8; b) 1; 4; c) 9; d) 25; e) $-\sqrt{11}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{11}$; f) -2; 6; g) 16; h) 3.

27. a) Taip; b) taip; c) ne; d) ne; e) ne; f) taip; g) ne.

28. a) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; b) $(-4; -2)$; c) $[-2; 8]$; d) $(-\infty; 4{,}5) \cup (5{,}5; +\infty)$; e) $(-1; 3)$; f) $[3; 6]$; g) $[0; 2]$; h) $(-\infty; -6) \cup (-3{,}5; +\infty)$; i) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

29. a) -1; 3; 4; b) 2; 3; 4; c) 6; d) -4; -3; 4. **30.** $(-1; 7)$. **31.** 0,6.

32. a) $[2; 3]$; b) $(2; 2\sqrt{2})$; c) $(-\infty; -2] \cup \left[5; 5\frac{9}{13}\right)$; d) $[0; 1)$.

33. a) $[0; 1{,}6] \cup [2{,}5; +\infty)$; b) $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$; c) $(-\infty; 2) \cup (3{,}5; +\infty)$; d) $[-3-\sqrt{5}; -4) \cup (-2; 0]$; e) $[0; 3]$.

34. a) $(1{,}5; 1{,}5)$; b) $(2; 5)$, $(5; 2)$; c) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{9}\right)$; d) $(3; 2)$, $(-3; -2)$; e) $(0; 0)$, $(-1{,}2; -1{,}8)$; f) $(0; -3{,}5)$, $(0; 3)$, $(21; 21)$; g) $(2; 2)$; h) $(-4; 4)$.

35. $-0{,}25$; 0. **36.** 64 km/h. **37.** 24 ℓ, 70%. **38.** 15%. **39.** 9 mėn.
40. 102°. **49.** 30 cm. **51.** 37° ir 143°. **52.** 65° ir 115°. **54.** 63°.
56. Ne. **57.** 14. **58.** 28; 20. **59.** 37 arba 48. **60.** 7 arba 14.
61. $\left[-2\frac{2}{7}; -1\right)$. **62.** 4. **63.** (2; 6). **64.** 1 h. **65.** 5,04 km. **66.** 19. **67.** 2,5.
68. *Nurodymas*. Pasinaudokite nelygybe $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2 \geqslant 0$.
69. *Nurodymas*. Nelygybę nagrinėkite intervaluose $(-\infty; 0]$, $(0; 1)$ ir $[1; +\infty)$.
70. 17. **71.** 9; 10. **72.** a) (10; 7), (−7; −10); b) (−2; −3), (3; 2).

9 skyrius (117–122 psl.)

2. $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$. **6.** a) $\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{CB}$.
10. b) $\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{AB}$. **11.** (2; 5) ir (0; −2). **12.** 13.
13. $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right)$. **16.** $M(6; -1)$. **17.** a) $5\sqrt{3}$; b) $-1{,}8$; c) -6; d) $-1{,}2$. **18.** $1\frac{1}{3}$.
19. $-3{,}4$. **20.** $\frac{5}{\sqrt{34}}$.
22. *Nurodymas*. Pratęskite OB iki susikirtimo su O_1A_1.
24. $50^\circ30'$.
25. *Nurodymas*. Remkitės trikampių ABC ir EBD panašumu.
26. 30°, 75°, 75° arba 30°, 30°, 120°.
27. a) $x=2{,}4$; $y=4{,}5$; b) $x=1{,}2$; $y=3$. **28.** $BE=6$ cm; $EC=3$ cm.
29. $OA=36$ cm; $AC=24$ cm; $CE=30$ cm; $OB=45$ cm; $DF=37{,}5$ cm; $CD=53\frac{1}{3}$ cm; $AB=32$ cm.
30. 20 cm; 24 cm; 28 cm. **31.** 4 cm. **32.** $x=12{,}5$; $y=20{,}8$.
33. a) Taip; b) taip.
34. *Nurodymas*. Įrodykite, kad $\triangle ADC \backsim \triangle BDC$.
35. *Nurodymas*. Įrodykite, kad $\triangle ADC \backsim \triangle ACB$ ir $\triangle BDC \backsim \triangle ACB$.
36. *Nurodymas*. Panagrinėkite atvejus $a<0$, $a=0$ ir $a>0$.
37. a) $-1\frac{5}{8}$; b) $1\frac{1}{3}$; c) 15. **38.** $\frac{ab}{a+b}$. **39.** a) $\frac{x^2+y^2}{xy}$; b) $\frac{4}{xy}$; c) $\sqrt{\frac{a}{c}}$.
40. *Nurodymas*. Suprastinkite reiškinį, po to jį paanalizuokite.
41. *Nurodymas*. Užrašykite reiškinį pavidalu $n+\frac{1}{n+\frac{1}{n}}$.
42. a) $3-\sqrt{3}$; b) 2; c) $10-2\sqrt{23}$; d) $2\sqrt{3}-1$; e) $4\sqrt{ab}$; f) $4\sqrt{a^2-1}$; g) $20\sqrt{2a+3}$; h) $2m+1$.
43. Tik su $a \geqslant b$. **44.** a) $2+\sqrt{3}+\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}$; b) $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{a-b}$.
45. *Nurodymas*. a) Atkreipkite dėmesį, kad $26 \pm 15\sqrt{3}=(2\pm\sqrt{3})^3$;
b) nagrinėkite skirtumą $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}-2$.

46. 1.

48. a) $(0; 4)$, $\left(\frac{1}{4}; 4\frac{3}{4}\right)$; b) $(-3; 1)$, $(3; -1)$, $\left(\frac{25}{\sqrt{53}}; \frac{4}{\sqrt{53}}\right)$, $\left(-\frac{25}{\sqrt{53}}; -\frac{4}{\sqrt{53}}\right)$; c) $\left(\frac{1}{10}; \frac{1}{3}\right)$; d) $(9; 4)$, $(4; 9)$.

49. a) $(2, 3)$; b) $(-3-\sqrt{7}; -3)$. **50.** $p^3 - 3pq$.

51. a) $-2\frac{2}{3}$; 1; b) $-6{,}5$; 4; c) $-\frac{1}{3}$; 1.

52. a) $(-\infty; -3) \cup \left[-\frac{3}{5}; -\frac{1}{3}\right)$; b) $\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$; c) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

14 skyrius (184–201 psl.)

2. a) $a = 2$; $b = 1$; b) $a = -3$; $b = -1$.

3. a) $x \neq -3$; b) $x \neq \pm 4$; c) $\boldsymbol{R}$; d) $x > 0$; e) $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$; f) $[0; 6]$; g) $x \geqslant -1$, $x \neq 0$, $x \neq 3$; h) $x \geqslant 1$, $x \neq 17$.

4. a) $-4\frac{1}{3} < x < -1$; b) $1 \leqslant x \leqslant 2{,}5$.

5. a) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$; b) $\left[-\frac{1}{8}; +\infty\right)$; c) $\left(-\infty; 6\frac{1}{5}\right)$; d) $\left[-6\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

7. a) $x \neq 4$; b) $f(-10) = \frac{3}{7}$; $f(0) = -1$; $f(0{,}6) = -1\frac{6}{17}$; c) $f(-4) = 0$; $f(2) = -3$; $f\left(-9\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5}$.

8. a) $x \geqslant 0$ ir $x \neq 2$; b) $f(0{,}25) = -\frac{2}{7}$, $f(16) = \frac{2}{7}$, $f(20) = \frac{\sqrt{5}}{9}$; c) $f(0) = 0$, $f(4) = 1$, $f(9) = \frac{3}{7}$.

9. a) -1; b) 1; c) -1; d) $\frac{1}{510}$.

10. a) $32 + 0{,}6$; b) $0 + 0{,}15$; c) $-9 + 0{,}7$; d) $-1 + 0{,}66$.

11. 4 nariai.

13. a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$; b) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; c) $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$; d) $y = \sqrt[3]{\frac{x}{3}}$; e) $y = \frac{x}{x-4}$; f) $y = \frac{1}{1-3x}$.

14. a) ± 5; b) 6 ir -8; c) $\varnothing$; d) 1; e) $\varnothing$; f) -5.

15. a) $f(3{,}5) < f(-4{,}2)$; b) $g(3{,}5) > g(-4{,}2)$; c) $f(-7) > g(-7)$; d) $g(-4) < f(-3)$; e) $f\left(-\frac{15}{16}\right) < g\left(\frac{16}{15}\right)$; f) $f\left(-1\frac{1}{3}\right) < g\left(1\frac{7}{15}\right)$.

16. a) ir f) lyginės, b) nelyginė, c), d) ir e) nei lyginės nei nelyginės.

19. a) $x = \pm\sqrt[6]{10}$, $\sqrt[6]{10} \approx 1{,}5$; b) $x = \pm\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[6]{2} \approx 1{,}1$; c) $\varnothing$; d) $[-\sqrt[6]{10}; \sqrt[6]{10}]$; e) $(-\infty; -\sqrt[6]{2}) \cup (\sqrt[6]{2}; +\infty)$; f) $\boldsymbol{R}$.

20. a) $x = \sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}4$; b) $x = -\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}7$; c) $x = -\sqrt[3]{0{,}5}$, $\sqrt[3]{0{,}5} \approx 0{,}8$; d) $(\sqrt[3]{3}; +\infty)$; e) $(-\infty; -\sqrt[3]{5})$; f) $(-1; +\infty)$.

21. a) 5 ir -5; $[-5; 0) \cup [5; +\infty)$; b) $\varnothing$; $x < 0$.

22. a) $E_f = \left[\frac{27}{100}; 27\right]$, $E_g = \left[\frac{3}{100}; 3\right]$; b) $E_f = \left[\frac{81}{10\,000}; 81\right]$; $E_g = \left[\frac{27}{1000}; 27\right]$.

23. a) $\sqrt[5]{5}$; $4\sqrt[4]{x}$; $\sqrt[4]{4x}$; b) $\frac{1}{\sqrt[5]{x^7y^7}}$; $\sqrt[5]{(x+y)^7}$; $\sqrt[4]{\frac{y}{x}}$; c) $\sqrt[3]{ab}$; $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$; $b\sqrt[3]{a}$; d) $\sqrt[5]{m^2}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{z^{16}}}$.

24. a) $34^{\frac{1}{2}}$; $5a^{\frac{1}{5}}$; $-\left(\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$; b) $5(a+6)^{-\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{1}{6}}$; $(a+b)^{\frac{9}{7}}$.

25. a) $[0; 4]$; b) $[1; 9]$; c) $\left[-\frac{1}{3}; 0\right]$. **26.** a) $[0; 2]$; b) $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$; c) $[1; 3]$.

27.

Funkcija	Apibrėžimo sritis	Reikšmių sritis	Lyginumas	Didėjimo intervalai	Mažėjimo intervalai
$f(x)=x^{-5}$	$x \neq 0$	$y \neq 0$	nelyginė	—	$(-\infty; 0)$; $(0; +\infty)$
$f(x)=x^{-\frac{1}{5}}$	$x > 0$	$y > 0$	nei lyginė, nei nelyginė	—	$(0; +\infty)$
$f(x)=x^{\frac{2}{5}}$	$x > 0$	$y > 0$	nei lyginė, nei nelyginė	$(0; +\infty)$	—
$f(x)=x^{\frac{5}{2}}$	$x > 0$	$y > 0$	nei lyginė, nei nelyginė	$(0; +\infty)$	—
$f(x)=-x^{-5}$	$x \neq 0$	$y \neq 0$	nelyginė	$(-\infty; 0)$; $(0; +\infty)$	—

28. a) 1; b) $\varnothing$; c) $\varnothing$; d) 625; e) $\frac{2}{3}$; f) 2,0736.

29. a) $\frac{2a^{\frac{1}{2}}}{1-a^{\frac{1}{2}}}$; b) $\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$; c) $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$; d) $\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}$.

30. a) 4; b) $\varnothing$; c) 1; 2; d) ± 2; 0; 1; e) 3; f) $\varnothing$.

31. a) $(25; 36)$; b) $\varnothing$; c) $(100; 25)$; d) $(81; 9)$.

33. a) $f(0)=1$, $f(-1)=\frac{1}{9}$; $f(1)=1$; b) $f(0)=1$, $f(2)=0{,}0625$; $f(3)=1$.

34. a) $D_f=(-\infty; -1)\cup(-1; +\infty)$; $E_f=(0; 1)\cup(1; +\infty)$; b) $D_f=[-1; +\infty)$; $E_f=(0; 1]$; c) $D_f=[-3; 3]$; $E_f=[\frac{1}{8}; 1]$; d) $D_f=(0; +\infty)$; $E_f=(0; 1)$.

37. a) 8; b) 9; c) $-\frac{1}{2}$; d) $-\frac{3}{16}$. **39.** a) $x=1$; b) $\varnothing$; c) $x=0$; d) $x=1$.

40. a) 1; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{5}$; -3; b) -2; 4; $2\frac{1}{3}$; 3; c) $1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 12 ir 5; $1\frac{1}{2}$;
d) 3; $1\frac{1}{2}$; 7 ir -1; 2,5.

41. a) $(1; 5)$; b) $(5; 32)$; c) $(1; 41)$; d) $(3; 15)$.

42. a) 3; b) 3; c) 2; 1; d) -2; e) 0 ir 1; f) 0 ir 1.

43. a) 2; b) 16; c) $\frac{3}{4}$; d) 0. **44.** a) $(2; 3)$, $(3; 2)$; b) $(3; -2)$.

45. a) $0<a<1$; b) $0<a<1$; c) $0<a<1$; d) $0<a<1$.

46. a) $x>1{,}5$; $-1<x<3$ ir $x>5$; $x>\frac{1}{3}$;
b) $x<1{,}2$; $x<-2$ ir $1<x<2$; $x<\frac{4}{5}$.

47. a) $x>3$; $x>\frac{2}{3}$; $0<x<1$; $x<1$;
b) $x<4$; $x<-\frac{1}{2}$ ir $x>\frac{1}{2}$; $x<1$ ir $x>6$; $x<1\frac{1}{4}$;
c) $x>2{,}5$; $x>-2$; $x<-1\frac{1}{2}$; $x<3$;
d) $x>\frac{1}{4}$; $-2<x<0$; $1<x<5$; $x>1$.

48. a) 1; $\sqrt{2}$; 9; $\frac{1}{36}$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{125}$; $36\sqrt{2}$; c) 9; 2; 0,04; d) 0,04; $\frac{1}{27}$; 25.

49. $\frac{1}{4}$; -4; $1\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{2}$; 0; $-\frac{1}{2}$; -6; $-2\frac{2}{3}$. **50.** a) $\log_{\frac{1}{2}} 5$; b) $\log_3 \frac{1}{2}$.

51. a) $3-3a$; b) $3-2a$. **52.** a) -6; b) -6; c) 0; d) $6\frac{1}{4}$; e) 2003; f) 3.

53. a) $\lg 42 - \lg 3{,}5$; b) $2\lg 5$; c) $2\lg 11$; d) $\lg 19 - \lg 2$.

54. a) $y=\log_7 x - 2$; b) $y=\log_3 \frac{x}{10}$; c) $y=\log_5 x + 3$; d) $y=-\log_5 x - 4\frac{1}{2}$.

55. a) $2+\log_9 x$; b) $\frac{1}{2}-\log_{81} x$; c) $3-3\log_{0,3} x$; d) $\frac{3}{2}+2\lg x$.

56. a) $x>3$; b) $x>2$; c) $-1<x<1$; d) $x<-3$ ir $x>3$; e) $-1\frac{1}{2}<x<5$; f) $x<-4{,}5$ ir $x>2$.

57. a) $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; b) $\left(1\frac{1}{2}; +\infty\right)$; c) $(-\infty; 0)\cup(1; +\infty)$; d) $(2; 5)$; e) $[-1; 2)\cup(2; 5)$; f) $(-3; 1)\cup(1; 6]$.

59. a) $x\approx 0{,}1$ ir $x=9$; b) $x=0$; c) $\varnothing$; d) $x\approx 0{,}1$ ir $x\approx 11{,}1$.

60. a) $x>1$; b) $0<x<1$; c) $x>5$; d) $0<x\leqslant 1$.

61. a) $2+2\log_3|x|$; $-3+3\log_3 a+\log_3 m$; $4+\frac{1}{3}\log_3 y+2\log_3|x|+\log_3 a$; $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\log_3 a+\frac{1}{3}\log_3 b$;
b) $1+2\lg|a|+3\lg y$; $-2+\lg x+\frac{1}{5}\lg y$; $\frac{1}{2}+3\lg a+2\lg|y|$; $\frac{1}{2}+5\lg x+10\lg|y|$.

62. a) $0{,}38$; $\frac{1}{5}$; $-1\frac{3}{5}$; b) $\pm\sqrt{13\frac{1}{3}}$; $\pm\sqrt{14}$; ± 4; c) $-\frac{3}{2}$; $\varnothing$; $\frac{1}{2}$; d) $-5\frac{5}{9}$; $\varnothing$; $\frac{5}{9}$.

63. a) $\frac{1}{36}$; b) 8; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{1}{64}$; e) $5\frac{1}{16}$; f) 125.

64. a) 2; 3; b) $\varnothing$; c) 6; 14; d) 6; e) 5; f) 4; g) 0; h) 1, $\sqrt{10}$.

65. a) (1; 1), (3; 9); b) $\left(\frac{1}{16}; -1\right)$. **66.** a) (3; 0); b) $(-9; 0)$; $(-1; 0)$.

67. a) 2; b) $\varnothing$; c) $\varnothing$; d) 3. **68.** a) 9; b) 8; c) 27; d) 9.

69. a) $-2\lg 2$; b) $\frac{\lg 6}{\lg 3{,}5}$; c) $\frac{\lg 7}{5\lg 2}$; d) $-\frac{\lg 3}{3\lg 5}$.

70. a) $(10^6; 10)$; b) (16; 10); c) (4,5; 0,5); d) (10; 9), (9; 10); e) (8; 6), (6; 8); f) (4; 2), $(4; -2)$.

71. a) 5; b) 3; c) 3; d) 4.

72. a) $x>4$; b) $x>-4\frac{15}{16}$; c) $-13<x<12$; d) $3<x<6$; e) $x<-2$ ir $x>6$; f) $x<-3$ ir $x>1\frac{2}{3}$; g) $0<x<1$; h) $0<x<1$; i) $1<x<2$; j) $x>2$.

73. a) -1; 0; 1; b) 7; 8; 9.

74. a) $1<x<3$ ir $4<x<5$; b) $2<x<2\frac{1}{3}$ ir $x>5$; c) $x<-3$ ir $x>7$; d) $x<-1$ ir $x>1$.

75. a) $x<1$; b) $x<0$.

76. a) Neturi; b), c), d) reiškiniai apibrėžti.

77. a) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$; b) $y=2^x$; c) $y=2^x-1$; d) $y=1+\log_2 x$.

78. $D_f=(0; 1{,}5]$. **79.** 36 cm. **80.** a) 60°; b) 150°. **81.** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

82. 4 cm. **85.** $\frac{12}{13}$. **86.** $\frac{2}{3}$. **88.** 5 cm. **89.** a) 900°; b) 1260°.

90. a) 12; b) 15. **91.** 68 cm arba 82 cm. **92.** 15 cm ir 30 cm.

97. $12(\sqrt{3}+1)$ cm; $36\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. **98.** a) 80 cm; b) $20\sqrt{3}$ cm. **99.** 8 dm.

100. a) 60° ir 120°; b) $8\sqrt{3}\,\text{dm}^2$. **101.** 5 cm. **102.** 9.

103. a) $\overrightarrow{MK}$ ir $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{KN}$ ir $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{MK}$ ir $\overrightarrow{KN}$; $\overrightarrow{NK}$ ir $\overrightarrow{NM}$; $\overrightarrow{KM}$ ir $\overrightarrow{NM}$; $\overrightarrow{NK}$ ir $\overrightarrow{KM}$; b) $\overrightarrow{MK}$ ir $\overrightarrow{KM}$; $\overrightarrow{MK}$ ir $\overrightarrow{NK}$; $\overrightarrow{MK}$ ir $\overrightarrow{NM}$; $\overrightarrow{KN}$ ir $\overrightarrow{NK}$; $\overrightarrow{KN}$ ir $\overrightarrow{KM}$; $\overrightarrow{KN}$ ir $\overrightarrow{NM}$; $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{NM}$; $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{KM}$; $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{NK}$.

104. a) $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{XY}$; b) $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{OT}$, $\overrightarrow{RS}$; c) $\overrightarrow{UV}$, $\overrightarrow{PQ}$.
Lygūs vektoriai: $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{XY}$; $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{OT}$; $\overrightarrow{EF}$ ir $\overrightarrow{PQ}$.

105. $|\overrightarrow{AM}| = 6\,\text{cm}$; $|\overrightarrow{CO}| = 4\,\text{cm}$; $|\overrightarrow{MO}| = 2\,\text{cm}$; $|\overrightarrow{NM}| = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

106. $|\overrightarrow{DC}| = 4\,\text{cm}$; $|\overrightarrow{ED}| = 5\,\text{cm}$; $|\overrightarrow{EA}| = 5\,\text{cm}$; $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{13}\,\text{cm}$.

107. Vienakrypčiai.

108. a) Lygiagretainis; b) trapecija.

109. a) $\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{BD}$; c) $2\overrightarrow{AB}$.

110. a) $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$; c) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.

111. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{f}$; $\vec{f} + \vec{g} = \vec{e}$; $\vec{f} - \vec{a} = \vec{b}$; $\vec{c} - \vec{g} = \vec{d}$; $\vec{e} + \vec{d} = \overrightarrow{AD}$; $\vec{e} - \vec{f} = \vec{g}$; $\vec{f} + \vec{g} + \vec{d} = \overrightarrow{AD}$; $\vec{b} + \vec{c} - \vec{d} = \overrightarrow{BE}$.

112. a) $\overrightarrow{KM} = \vec{k} + \vec{l}$; $\overrightarrow{MK} = -\vec{k} - \vec{l}$; b) $\overrightarrow{KN} = \vec{k} + \vec{l} + \vec{m}$; $\overrightarrow{NK} = -\vec{k} - \vec{l} - \vec{m}$; c) $\overrightarrow{LN} = \vec{l} + \vec{m}$; $\overrightarrow{NL} = -\vec{l} - \vec{m}$.

113. a) $\overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{XY}$; b) $3\overrightarrow{TY}$.

115. $\overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$; $\overrightarrow{DC} = \vec{a} - \vec{b}$; $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$; $\overrightarrow{EF} = -\vec{b}$; $\overrightarrow{AF} = \vec{b} - \vec{a}$; $\overrightarrow{AE} = 2\vec{b} - \vec{a}$.

117. a) $\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{BC}$; c) $\vec{0}$; d) $\overrightarrow{CB}$. **119.** a) $\vec{a}$; b) $\vec{a} - 2\vec{b}$; **120.** a) $-\vec{a} + 5\vec{b}$; b) $2\vec{x}$.

122. A. **123.** $a(1 + \frac{p}{100})^n$ Lt. **124.** $\approx 3{,}5\%$. **125.** 3 kartus mažesnis.

126. $\approx 10{,}41\%$; $\approx 16{,}99\%$. **127.** 2340 arba 2385. **128.** 5.

129. a) 0,(142857); b) 0,(81); c) 0,(307692); d) 0,41(6).

130. a) $\frac{13}{99}$; b) $-\frac{40}{33}$; c) $\frac{37}{30}$; d) $-\frac{3181}{990}$.

131. a) $\frac{5}{13}$; b) $0,(172)$; c) $\sqrt{3} + 3$; d) $-\sqrt{5} - \sqrt{2}$.

132. *Nurodymas*. Suprastinkite reiškinius.

133. a) $\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{3}$; c) 98; d) $-\frac{2}{x}$; e) $2\sqrt{x}$; f) $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$; g) $-\sqrt{a}$; h) $-\frac{1}{m}$.

134. a) $-\frac{1}{8}$; b) $0{,}1(\sqrt{5} - 5)$; c) $-(\frac{a}{b})^2$; d) $\frac{1}{6}$.

135. *Nurodymas*. Pakelkite abi lygybių puses kvadratu.

136. *Nurodymas*. Dviejų nelygių nuliui reiškinių A ir B suma lygi jų kubų sumai tik tuomet, kai $A^2 - AB + B^2 = 1$.

137. *Nurodymas*. Pasinaudokite nelygybe $(a-1)^2 + (b-1)^2 + (a-b)^2 \geqslant 0$.

138. 30; 60. **139.** 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

140. $\frac{p}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{k} - 1}\right)$; $\frac{p}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{2}{k} - 1}\right)$, $1 < k \leqslant 2$.

141. a) $\varnothing$; b) -1; 6; c) -2; 1; d) -6; -4; -1; 1; e) 1; -2; $-2 \pm \sqrt{6}$; f) -1; 2; g) 18; h) 20; i) $\varnothing$; j) 3; k) 1; -2.

142. a) $\{-2\} \cup (0; 1]$; b) $(-5; -1) \cup (1; +\infty)$; c) $(-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$; d) $(-2; +\infty)$; e) $(-\infty; -1) \cup (0; \frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$; f) $(-\infty; 0) \cup (1; 6)$.

143. -2; 1. **144.** -4; -3. **145.** $\geqslant 50$.

146. a) (9; 5); $(-9; -5)$; b) (1; 3); (3; 1); c) (2; 3); (3; 2).

ISBN 9955–491–22–1 (1 dalis)
ISBN 9955–491–23–X (2 dalys)

